Université Lyon 2 Probabilité
Licence 1 MIASHS

TD1 : Exercices sur les probabilités et les probabilités conditionnelles.

Exercice 1 Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y – a-il de classements possibles :

1. sans ex-aequo ;
2. avec exactement 2 ex-aequo ?

Solution :

1. Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a 20!
2. Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :
   (a) Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ choix ;
   (b) Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
   (c) Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a 18 ! choix.

Il y a donc au total : $19 \binom{20}{2}$ 18! choix possibles.

Exercice 2 Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

Solution :

1. Une grille-réponses est une suite ordonnée de 10 réponses, il y a 4 choix possibles pour chacune. Il y a donc 4^{10} grilles-réponses possibles.
2. L'événement E «répondre au hasard au moins 6 fois correctement» est réalisé si le candidat répond bien à 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 questions.
   — Notons A_n l'événement : «répondre au hasard exactement n fois correctement».
   — Alors, A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $10 - n$ sont incorrectes : 3 choix sont possibles pour chacune de ces dernières.
   — Comme il y a $\binom{10}{n}$ choix de n objets parmi 10 , et donc il y a :

$$\binom{10}{n} \times 3^{10-n}$$

façons de réaliser A_n et :

$$\mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{\left(\begin{array}{c} 10 \\ n \end{array}\right) \cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$

pour $n = 6, 7, 8, 9, 10$. On a donc

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728 \times 10^{-2}$$

soit environ 2%.

Exercice 3 Dans une équipe de 8 élèves constituée de 5 filles et 3 garçons, il y a 6 demi-pensionnaires. Le professeur d'EPS désigne, au hasard, un élève pour être le capitaine de l'équipe.

1. Quelle est la probabilité que le capitaine soit une fille ?
   Solution :
   $$\mathbb{P}(\text{ capitaine est une fille }) = \frac{5}{8}$$

2. Quelle est la probabilité pour que le capitaine soit un élève demi-pensionnaire ?
   Solution :
   $$\mathbb{P}(\text{ capitaine est un } dp) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Dans la suite, deux lois classiques de probabilité sont utilisées :
- la loi des probabilités totales (avec une partition constituée de $n = 2$ ensembles complémentaires)
- la loi des probabilités conditionnelles.

Référez vous à votre cours ou à votre chargé de TD si vous avez des doutes sur la manière dont elles sont utilisées dans les exercices suivants ;)

Exercice 4 En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires : Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Solution :

1. Le taux global de personnes soulagées : $\mathbb{P}(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.

2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $\mathbb{P}(A \mid S) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(S \mid A)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%$

Exercice 5 On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie : - Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%. - Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Solution :

1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est

$$\mathbb{P}\left(M \mid T^{+}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(T^{+} \mid M\right)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}\left(T^{+}\right)}$$

   or

$$\mathbb{P}\left(T^{+}\right) = \mathbb{P}\left(T^{+} \mid M\right)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T^{+} \mid S\right)\mathbb{P}(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255.$$

   D'où

$$\mathbb{P}\left(M \mid T^{+}\right) = 22.7\%$$

2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est

$$\mathbb{P}\left(S \mid T^{+}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M \mid T^{+}\right) = 77.3\%.$$

3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $P\left(M \mid T^{-}\right) = 0.0017$.
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1 - P\left(M \mid T^{-}\right) = 0.998 = 99.8\%$.