Université Lyon 2
Licence 2 MIASHS

Probabilité

TD2 : Exercices sur les probabilités et les probabilités conditionnelles.

Exercice 1 On considère le problème suivant sur les probabilités conditionnelles. Soit Ω un ensemble de résultats que l'on étudie et soient A, B et C trois événements, c'est à dire trois sous-ensembles de Ω.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B).$$
2. Montrer que
$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \mid C)$$
3. Appliquer cette dernière formule à $A =$"Beau temps à l'instant $t+1$", $B =$ "Pluie à l'instant t" et $C =$ "Pluie ou Neige à l'instant t".

Exercice 2 (Nouveau sur cette feuille !) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Calculer $P\left(X_1 = 1 \mid X_0 = 1\right), P\left(X_2 = 1 \mid X_0 = 1\right), P\left(X_3 = 1 \mid X_0 = 1\right), P\left(X_4 = 1 \mid X_0 = 1\right)$, $P\left(X_1 = 2 \mid X_0 = 2\right), P\left(X_2 = 2 \mid X_0 = 2\right), P\left(X_3 = 2 \mid X_0 = 2\right)$.
3. Quelle est la loi de X_1 si X_0 suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$?

Exercice 3 Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de celà, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.

2. Si le vecteur des probabilités de chaque état à l'instant t est donnée par
$$p^{(t)} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$
quel est le vecteur de probabilités de ces états à l'instant $t+2$?
3. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
4. (Attention, cette question est plus difficile et vous pouvez la sauter dans un premier temps !) Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaine ainsi obtenue.

Exercice 4 On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité $1/2$ pour chaque voisin.

1. Déterminer la matrice de transition de la chaîne ainsi obtenue.
2. Existe-t-il toujours un moyen d'aller d'un état à un autre avec probabilité non nulle ?
3. Exite-t-il une puissance de la matrice de transition dont toutes les entrées sont > 0 ?

Exercice 5 (Nouvel exercice sur cette feuille !) Dans une chaîne de Markov à deux états, l'espace d'état est $E = \{1, 2\}$ et la matrice de transition est
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$
où $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Déteriner la loi invariance quand $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Exercice 6 On dispose de 2 machines identiques fonctionnant indépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

1. On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition et éventuellement les distributions stationnaires.
2. Y-a-t'il un vecteur de probabilité qui est invariant par la matrice de transition, i.e. $\pi P = \pi$? Comment interpréter ce vecteur ?
3. Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.

Exercice 7 Processus de naissance et de mort (birth and death process, très utile dans l'étude des files d'attente en informatique et en sciences sociales). L'espace d'état est $E = \{0, 1, \ldots, N\}$, et la matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & q_i & r_i & p_i & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout état i tel que $1 \leq i \leq N-1$.

1. Déterminer la loi invariante pour cette chaîne dans le cas où toutes les probabilités sont strictement supérieures à zero.

2. Donner une interprétation de cette chaîne dans le cas d'une file d'attente dans un hopital.