Université Lyon 2 Probabilité
Licence 2 MIASHS

TD2 : Exercices sur les probabilités et les probabilités conditionnelles.

Exercice 1 On considère le problème suivant sur les probabilités conditionnelles. Soit Ω un ensemble de résultats que l'on étudie et soient A, B et C trois événements, c'est à l'instant dire trois sous-ensembles de Ω.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B).$$

Solution : Il suffit de se souvenir que

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B))}$$

et de passer $\mathbb{P}(B)$ au côté gauche de l'équation (en mulitipliant le terme de droite et le terme de gauche par $\mathbb{P}(B)$.

2. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \mid C)$$

Solution : On commence par ré-écrire la définition de $\mathbb{P}(A \cap B \mid C)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

puis on peut regrouper B et C en conditionnant par $B \cap C$:

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

mais comme

$$\frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(B \mid C)$$

on obtient finalement bien

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \mid C)$$

comme espéré !

3. Appliquer cette dernière formule à l'instant $A =$"Beau temps à l'instant l'instant $t+1$", $B =$ "Pluie à l'instant l'instant t" et $C =$ "Pluie ou Neige à l'instant l'instant t".
   Solution : On trouve

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{\text{BT à l'instant } t+1\} \cap \{\text{PL à l'instant } t\} \mid \{\text{PL ou N à l'instant } t\})\\ &= \mathbb{P}(\{\text{BT à l'instant } t+1\} \mid \{\text{PL à l'instant } t\} \cap \text{PL à l'instant } t)\\ &\qquad \cdot \mathbb{P}(\{\text{PL à l'instant } t\} \mid \{\text{PL ou N à l'instant } t\}).\end{aligned}$$

Exercice 2 (Nouveau sur cette feuille !) Soit une chaîne de Markov sur $\{1, 2, 3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Calculer

$$P\left(\text{être en 1 à l'instant 1} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right),$$
$$P\left(\text{être en 1 à l'instant 2} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right),$$
$$P\left(\text{être en 1 à l'instant 3} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right),$$
$$P\left(\text{être en 1 à l'instant 4} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right),$$
$$P\left(\text{être en 2 à l'instant 1} \mid \text{être en 2 à l'instant 0}\right),$$
$$P\left(\text{être en 2 à l'instant 2} \mid \text{être en 2 à l'instant 0}\right),$$
$$P\left(\text{être en 2 à l'instant 3} \mid \text{être en 2 à l'instant 0}\right),$$

   Solution : La matrice de transition de la chaîne "deux pas pas deux pas" est le carré de la matrice de transition P en un pas. De même, la matrice de transition de la chaîne "trois pas par trois pas" est le cube de la matrice de transition P en un pas. De même, la matrice de transition de la chaîne "quatre pas par quatre pas" est P^4. On peut donc répondre aux questions successives par
   (a) $P\left(\text{être en 1 à l'instant 1} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right) = P_{11}$
   (b) $P\left(\text{être en 1 à l'instant 2} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right) = (P^2)_{1,1}$
   (c) $P\left(\text{être en 1 à l'instant 3} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right) = (P^3)_{1,1}$
   (d) $P\left(\text{être en 1 à l'instant 4} \mid \text{être en 1 à l'instant 0}\right) = (P^4)_{1,1}$
   (e) $P\left(\text{être en 2 à l'instant 1} \mid \text{être en 2 à l'instant 0}\right) = (P)_{2,2}$
   (f) $P\left(\text{être en 2 à l'instant 2} \mid \text{être en 2 à l'instant 0}\right) = (P^2)_{2,2}$

(g) $P\,(\text{être en 2 à l'instant 3} \mid \text{être en 2 à l'instant 0}) = (P^3)_{2,2}$

Complément d'enquête ! On peut essayer de voir pourquoi la formule qui dit que

"la matrice des probabilités de transition en t pas est la puissance $t^{\text{ième}}$ de P"

est vraie. La probabilité d'aller en j en t pas sachant que l'on part de i est la composante $(P^t)_{i,j}$, c'est à dire :

$$\mathbb{P}\,(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant 0"}) = (P^t)_{i,j}$$

On façon d'obtenir ce résultat est la suivant : on regarde les différentes valeurs de t possibles : Pour $t = 1$, c'est à dire $P^t = P$, c'est la définition de P. Pour t général, on admet que la formule soit vraie pour $t-1$ et on va montrer qu'elle sera encore vraie en t. Pour cela on calcule

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\,(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant 0"})\\
&= \mathbb{P}\,(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \cap \text{"on est en 1 à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant 0"})\\
&\quad + \mathbb{P}\,(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \cap \text{"on est en 2 à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant 0"})\\
&\quad\ \vdots\\
&\quad + \mathbb{P}\,(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \cap \text{"on est en } N \text{ à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant 0"}).
\end{aligned}$$

où on a décomposé l'événement "être en j à l'instant t" selon la partition

$$\begin{aligned}
B_1 &= \text{"on est en 1 à l'instant } t-1\text{"},\\
&\ \dots,\\
B_N &= \text{"on est en } N \text{ à l'instant } t-1\text{"}
\end{aligned}$$

et on a appliqué la formule des probabilités totales (avec la probabilité conditionnelle sachant $C = \text{"on est en } i \text{ à l'instant 0"}$, c'est à dire

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A \cap B_k \mid C)$$

Maintenant, on peut ré-écrire cette dernière formule sous la forme utilisant les probabilités conditionnelles plutot que les probabilités d'intersection et on obtient

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A \mid B_k \cap C)\mathbb{P}(B_k \mid C).$$

ce qui donne en français,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } 1 \text{ à l'instant } t-1\text{"} \cap \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot \mathbb{P}\left(\text{"on est en } 1 \text{ à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&\quad+\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } 2 \text{ à l'instant } t-1\text{"} \cap \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot \mathbb{P}\left(\text{"on est en } 2 \text{ à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&\quad\ \vdots\\
&\quad+\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } N \text{ à l'instant } t-1\text{"} \cap \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot \mathbb{P}\left(\text{"on est en } N \text{ à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right).
\end{aligned}$$

Mais comme on a une chaine de Markov, la probabilité de ce qui se passe au temps t sachant ce qu'il se passe au temps t et ce qu'il s'est passé au temps 0 est en fait équale à la probabilité de ce qui se passe au temps t sachant ce qu'il se passe au temps t et cela se simplifie en

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } 1 \text{ à l'instant } t-1\text{"}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot \mathbb{P}\left(\text{"on est en } 1 \text{ à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&\quad+\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } 2 \text{ à l'instant } t-1\text{"}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot \mathbb{P}\left(\text{"on est en } 2 \text{ à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&\quad\ \vdots\\
&\quad+\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } N \text{ à l'instant } t-1\text{"}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot \mathbb{P}\left(\text{"on est en } N \text{ à l'instant } t-1\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right).
\end{aligned}$$

Cela s'écrit à l'aide de la matrice P comme

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&= P_{1j}(P^{t-1})_{i1} + P_{2j}(P^{t-1})_{i2} + \cdots + P_{Nj}(P^{t-1})_{iN}\\
&= \sum_{k=1}^{N} P^{t-1}_{i,k} P_{k,j}
\end{aligned}$$

ce qui donne donc par la formule de multiplication matricielle

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\text{"être en } j \text{ à l'instant } t\text{"} \mid \text{"on est en } i \text{ à l'instant } 0\text{"}\right)\\
&= \left(P^{t-1}P\right)_{i,j}\\
&= (P^t)_{i,j}
\end{aligned}$$

comme annoncé ! (on l'a montré pour n'importe quelle valeur de N en fait, pas juste $N = 5$ comme dans l'exercice.

3. Quelle est la loi de du système à l'instant l'instant 1 s'il suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ à l'instant l'instant 0 ?

   Solution : On utilise la formule
$$p^{(1)} = p^{(0)}P.$$
   qui donne
$$p^{(1)} = [1/3, 1/3, 1/3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = [2/9, 6/9, 1/9].$$

Exercice 3 Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à l'instant partir de celà, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.

   Solution : On a l'ensemble des états suivants $E = \{BT, PL, N\}$ et le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent, indépendamment de la période de l'année également. On a donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

2. Si le vecteur des probabilités de chaque état à l'instant l'instant t est donnée par
$$p^{(t)} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$
   quel est le vecteur de probabilités de ces états à l'instant l'instant $t + 2$?

   Solution : On sait que pour passer du vecteur de probabilités à l'instant l'instant t au vecteur de probabilités à l'instant l'instant $t + 2$, il faut utiliser la formule :
$$p^{(t+1)} = p^{(t)}\ P.$$
   En utilisant cette formule deux fois de suite, on obtient
$$p^{(t+2)} = p^{(t)}\ P \cdot P = p^{(t)}P^2.$$

On peut alors calculer [1]

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ce qui donne

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{7} & \frac{8}{3} \\ \frac{16}{16} & \frac{16}{16} & \frac{8}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}.$$

3. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?

   Solution : Contraitement à l'instant la question précédente, on veut la probabilité conditionnelle d'être dans chacun des états à l'instant l'instant $t+2$, conditionnellement à l'instant l'événement d'être dans l'état BT à l'instant l'instant t.

   On va décomposer pour comprendre comment cela se calcule, puis on va faire voir comment cela se relie à l'instant P^2.

   (a) On commence par calculer $\mathbb{P}(BT \text{ à l'instant } t+2 \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})$, puis on calculera $\mathbb{P}(PL \text{ à l'instant } t{+}2 \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})$ et enfin $\mathbb{P}(N \text{ à l'instant } t{+}2 \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})$ Comme

   $$\{BT \text{ à l'instant } t+1\}, \{PL \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{N \text{ à l'instant } t+1\}$$

   forment une partition de tous les résultats possibles, car il faut bien qu'un de ces événements ait lieu, on a

   $$\begin{aligned} &\mathbb{P}(BT \text{ à l'instant } t+2 \mid \{BT \text{ à l'instant } t\}) \\ &= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid BT \text{ à l'instant } t) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{PL \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\}). \end{aligned} \tag{2}$$

   Essayons maintenant d'exprimer ces probabilités d'intersection en fonction de probabilités conditionnelles grâce à l'instant l'Exercice 1 :

   $$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid BT \text{ à l'instant } t) \\ &= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\}) \\ &\qquad \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})}_{P_{BT,BT}} \end{aligned}$$

1. dites moi si vous avez des difficultés à l'instant calculer le produit des matrices

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{PL \text{ à l'instant } t+1\} \mid BT \text{ à l'instant } t)$$
$$= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{PL \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\}) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})}_{p_{BT,PL}}$$

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{N \text{ à l'instant } t+1\} \mid BT \text{ à l'instant } t)$$
$$= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{N \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\}) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\{N \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})}_{p_{BT,N}}$$

Le fait que l'on ait affaire à l'instant une chaîne de Markov implique que "sachant le présent, le futur est indépendant de comment on est arrivé à l'instant l'état présent", implique que

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\})$$
$$= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t+1\}),$$

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{PL \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\})$$
$$= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{PL \text{ à l'instant } t+1\}),$$

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{N \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\})$$
$$= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{N \text{ à l'instant } t+1\}).$$

Cela s'écrit plus simplement à l'instant l'aide des notations utilisant les entrées de la matrice P :

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\}) = P_{BT,BT},$$

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{PL \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\}) = P_{PL,BT},$$

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{N \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t\}) = P_{N,BT}.$$

On obtient donc finalement

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid BT \text{ à l'instant } t) = P_{BT,BT} \cdot P_{BT,BT}$$

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{PL \text{ à l'instant } t+1\} \mid BT \text{ à l'instant } t) = P_{PL,BT} \cdot P_{BT,PL}$$

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \cap \{N \text{ à l'instant } t+1\} \mid BT \text{ à l'instant } t) = P_{N,BT} \cdot P_{BT,N}$$

En faisant la somme de ces trois valeurs, on trouve

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})$$
$$= p_{BT,BT} \times p_{BT,BT} + p_{BT,PL} \times p_{PL,BT} + p_{BT,N} \times p_{N,BT}$$
$$= 0 \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(b) On calcule maintenant de la même façon

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{PL \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})\\
&= p_{PL,BT} \times p_{BT,BT} + p_{PL,PL} \times p_{PL,BT} + p_{PL,N} \times p_{N,BT}\\
&= 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

(c) et on finit par

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{N \text{ à l'instant } t+2\} \mid \{BT \text{ à l'instant } t\})\\
&= p_{PL,BT} \times p_{BT,BT} + p_{PL,PL} \times p_{PL,BT} + p_{PL,N} \times p_{N,BT}\\
&= 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

(d) Les deux états ayant la probabilité la plus forte à l'instant l'instant $t+2$, sachant qu'il fait beau à l'instant l'instant t sont donc pluie et neige ! pas rassurant ...

(e) On remarque finalement que les calculs que l'on a fait reviennent à l'instant prendre la première ligne de P^2 ! en effet la première ligne de P est justement le vecteur de toutes les probabilité de ce qu'il va se passer à l'instant l'intant $t+1$ conditionnellement à l'instant "beau temps" à l'instant l'instant t. De même, notre calcul nous montre que la première ligne de P^2 est le vecteur de toutes les probabilité de ce qu'il va se passer à l'instant l'intant $t+2$ conditionnellement à l'instant "beau temps" à l'instant l'instant t. On pourrait continuer sans difficulté avec $t+3$, $t+4$, etc en calculant la première ligne de P^3, P^4, etc ...

Ainsi, si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le surlendemain est la pluie ou la neige

4. Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaine ainsi obtenue.

Solution [2] : Comme il n'y a plus que deux états, cela devrait aller ! La probabilité de passer de "beau temps" à l'instant "beau temps" est 0 et la probabilité de passer de "beau temps" à l'instant "mauvais temps (c'est à l'instant dire de $\{PL, N\}$) est" 1. Reste à l'instant calculer la probabilité de passer de "mauvais temps" à l'instant "beau temps" et celle de passer de de "mauvais temps" à l'instant "mauvais temps". Allons-y ...
Comme les événements $\{PL \text{ à l'instant } t\}$ et $\{N \text{ à l'instant } t\}$ forment une partition de l'ensemble des résultats possibles (il faut bien qu'il arrive l'un ou l'autre !) on a la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\})\\
&= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{PL \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\})\\
&\quad + \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \cap \{N \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\})
\end{aligned}$$

2. la solution donnée dans la version précédente (que j'avais empruntée ici https://helios.mi.parisdescartes.fr/ rlachiez/enseignement/markov/feuille1.pdf), présentait un beug ; je vous donne ici la solution rigoureuse

et en utilisant à l'instant nouveau $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ à l'instant } t\} \cap \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&\qquad \mathbb{P}(\{PL \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{N \text{ à l'instant } t\} \cap \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&\qquad \mathbb{P}(\{N \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}).
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\{PL \text{ à l'instant } t\} \cap \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\} = \{PL \text{ à l'instant } t\}$$

et

$$\{N \text{ à l'instant } t\} \cap \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\} = \{N \text{ à l'instant } t\}$$

cela se simplifie en

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&= \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ à l'instant } t\}) \\
&\qquad \mathbb{P}(\{PL \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{N \text{ à l'instant } t\}) \\
&\qquad \mathbb{P}(\{N \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}).
\end{aligned}$$

Finalement, on sait que

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ à l'instant } t\}) = \frac{1}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{N \text{ à l'instant } t\}) = \frac{1}{4}$$

, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{P}(\{PL \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\mathbb{P}(\{N \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\mathbb{P}(\{PL \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) + \mathbb{P}(\{N \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\})\Big),
\end{aligned}$$

ce qui se simplifie car

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{PL \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) + \mathbb{P}(\{N \text{ à l'instant } t\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) \\
&= 1!
\end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que "conditionnellement au fait qu'il pleuve ou qu'il neige, soit il pleut, soit il neige .. On obtient donc tout simplement

$$\mathbb{P}(\{BT \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) = \frac{1}{4}$$

et donc par complémentarité,

$$\mathbb{P}(\{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t+1\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\}) = \frac{3}{4}.$$

Si on avait choisi de calculer d'abord $\mathbb{P}(\{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t{+}1\} \mid \{PL \text{ ou } N \text{ à l'instant } t\})$, on serait tombé sur une tuile : cela ne se simplifie pas et on reste le bec dans l'eau.

Exercice 4 On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à l'instant chaque instant, d'un point à l'instant l'un de ses voisins avec la probabilité 1/2 pour chaque voisin.

1. Déterminer la matrice de transition de la chaîne ainsi obtenue.

   Solution : L'ensemble des états est $E = \{1,2,3,4,5\}$. On a $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ pour $i \in \{2,3,4\}, p_{1,2} = p_{1,5} = 1/2$ et $p_{5,1} = p_{5,4} = 1/2$, ce qui donne la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Existe-t-il toujours un moyen d'aller d'un état à un autre avec probabilité non nulle ?

   Solution : Il suffit d'aller toujours sur sa gauche pendant k sauts (ou pas). La probabilité de faire k pas à gauche est de $.5^k$ et est donc non nulle et permet de relier n'importe qui à n'importe qui sauf le point de départ. Pour aller du point de départ à lui même, cela peut se faire en 2 coups, 4 coups, 6 coups, etc ...

3. Exite-t-il une puissance de la matrice de transition dont toutes les entrées sont > 0 ?

   Solution : On peut essayer une puissance de 3 et on trouve

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0.375 & 0.125 & 0.125 & 0.375 \\ 0.375 & 0 & 0.375 & 0.125 & 0.125 \\ 0.125 & 0.375 & 0 & 0.375 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0.375 & 0 & 0.375 \\ 0.375 & 0.125 & 0.125 & 0.375 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Si on essaie une puissance de 4, par contre,

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.375 & 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.0625 \\ 0.0625 & 0.375 & 0.0625 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.0625 & 0.375 & 0.0625 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.375 & 0.0625 \\ 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.375 \end{pmatrix}$$

et comme prévu, c'est bon !

Exercice 5 Dans une chaîne de Markov à l'instant deux états, l'espace d'état est $E = \{1, 2\}$ et la matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Déteriner la loi invariance quand $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Solution : Les équations définissan la loi invaiante sont

$$\pi(1) = \pi(1)(1-\alpha) + \pi(2)\beta$$
$$\pi(2) = \pi(1)\alpha + \pi(2)(1-\beta)$$

Ce système dépendant se réduit à l'instant une seule équation $\pi(1)\alpha = \pi(2)\beta$, à l'instant laquelle il faut ajouter $\pi(1) + \pi(2) = 1$ qui exprime que π est une probabilité. On obtient

$$\pi(1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \pi(2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Exercice 6 On dispose de 2 machines identiques fonctionnant indépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

1. On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition et éventuellement les distributions stationnaires.

   Solution : L'ensemble des états est $E = \{0, 1\}$ car si le soir il y a une ou aucune machine en panne, le lendemain matin, il y en aura 0 ; et si le soir, il y en a 2, le lendemain matin, il y en aura une seule. Le nombre de machines en panne le matin ne dépend que de celui de la veille au matin et de ce qu'il s'est passé dans la journée, ceci indépendamment de la période de l'année. On a donc bien une chaîne de Markov dont il faut déterminer la matrice de transition. On a $p_{0,1} = q^2$ (les 2 machines tombent en panne dans la journée et ces pannes sont indépendantes entre elles) et

   $$p_{0,0} = (1-q)^2 + 2q(1-q) = 1 - q^2$$

   où $\big((1-q)^2$ correspond à l'instant aucune panne dans la journée et $2q(1-q)$ à l'instant une seule panne qui peut provenir d'une machine ou de l'autre.). On a également $p_{1,0} = 1 - q$ (la machine en panne est réparée et l'autre fonctionne toujours), et $p_{1,1} = q$ (la machine en panne est réparée et l'autre est tombée en panne). Ainsi, on a la matrice :

   $$P = \begin{bmatrix} 1-q^2 & q^2 \\ 1-q & q \end{bmatrix}.$$

2. Y-a-t'il un vecteur de probabilité qui est invariant par la matrice de transition, i.e. $\pi P = \pi$? Comment interpréter ce vecteur ?

   Solution : Pour la distribution stationnaire, on résout
$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} 1-q^2 & q^2 \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$
   soit $\pi_1 = q^2\pi_0 + q\pi_1$, d'où $\pi_1 = \dfrac{q^2}{1-q}\pi_0$ et avec $\pi_0 + \pi_1 = 1$, on obtient
$$\pi_0 \left(1 + \frac{q^2}{1-q}\right) = 1,$$
   soit
$$\pi_0 = \frac{1-q}{1-q+q^2}$$
   et
$$\pi_1 = \frac{q^2}{1-q+q^2}.$$
   Avec $q = \dfrac{1}{4}$, on a alors $\pi_0 = \dfrac{12}{13}$ et $\pi_1 = \dfrac{1}{13}$.

3. Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.

   Solution : On a maintenant $E' = \{0, 1, 2\}$ car aucune machine n'est réparée la nuit ; $p'_{0,0} = (1-q)^2$ (aucune panne dans la journée), $p'_{0,1} = 2q(1-q)$ (une des 2 machines est tombée en panne) et $p'_{0,2} = q^2$ (les 2 machines sont tombées en panne) ; $p'_{1,0} = 1-q$ (la machine qui fonctionne ne tombe pas en panne), $p'_{1,1} = q$ (la machine qui fonctionne tombe en panne, l'autre est réparée), $p'_{1,2} = 0$ (la machine en panne est sure de remarcher le lendemain) ; de même, $p'_{2,1} = 1$ (une seule des 2 machines en panne est réparée). Ainsi, on a la matrice :
$$P = \begin{pmatrix} (1-q)^2 & 2q(1-q) & q^2 \\ 1-q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Pour la distribution stationnaire, on résout
$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} (1-q)^2 & 2q(1-q) & q^2 \\ 1-q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   soit
$$\pi_0 = (1-q)^2\pi_0 + (1-q)\pi_1,$$
   d'où
$$\pi_1 = \frac{2q-q^2}{1-q}\pi_0$$

et

$$\pi_2 = q^2\pi_0,$$

d'où avec $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, on obtient

$$\pi_0\left(1 + q^2 + \frac{2q - q^2}{1-q}\right) = 1,$$

soit

$$\pi_0 = \frac{1-q}{1+q-q^3}, \pi_1 = \frac{2q-q^2}{1+q-q^3}$$

et

$$\pi_2 = \frac{q^2-q^3}{1+q-q^3}.$$

Avec $q = \frac{1}{4}$, on a alors

$$\pi_0 = \frac{48}{79}, \pi_1 = \frac{28}{79}$$

et

$$\pi_2 = \frac{3}{79}.$$

Exercice 7 On suppose qu'un trait est gouverné par deux gènes, qui peuvent être de deux types, G et g. On suppose que G est dominant (c'est-à-dire que c'est lui qui s'exprime si la paire est Gg) et g récessif. L'état Gg est appelé hybride, l'état GG dominant, l'état gg récessif.

1. Un éleveur adopte la stratégie suivante : à l'instant chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un hybride. Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.
2. Un éleveur adopte la stratégie suivante : à l'instant chaque fois, il apparie l'individu de la n-ième génération avec un dominant. Modéliser la situation par une chaîne de Markov, et classer les états.
3. Comparer qualitativement l'évolution des deux chaînes.

Exercice 8 Processus de naissance et de mort (birth and death process, très utile dans l'étude des files d'attente en informatique et en sciences sociales). L'espace d'état est $E = \{0, 1, \ldots, N\}$, et la matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_0(=1) & & & & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & q_i & r_i & p_i & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ & & & & & & q_N(=1) & 0 \end{bmatrix}$$

où $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout état i tel que $1 \leq i \leq N-1$.

1. Déterminer la loi invariante pour cette chaîne dans le cas où toutes les probabilités sont strictement supérieures à zero.

   Solution : Le vecteur ligne π est le vecteur de loi invariante (ou aussi nommé distribution stationnaire, ou loi stationnaire), s'il vérifie

   $$\pi = \pi P.$$

   Si on regarde à la loupe à quoi cette équation correspond pour chaque i, on obtient pour les états $i \neq 0, N$ que

   $$\pi(i) = p_{i-1}\pi(i-1) + r_i\pi(i) + q_{i+1}\pi(i+1) \tag{3}$$

   et pour les états 0 et N [3] :

   $$\pi(0) = \pi(1)q_1, \quad \pi(N) = \pi(N-1)p_{N-1}.$$

   Prenons d'abord les équations de type (3), et en remarquant que $r_i = 1 - p_i - q_i$ et en regroupant des termes, on a, pour $2 \leq i \leq N-1$,

   $$\pi(i) = p_{i-1}\pi(i-1) + (1 - p_i - q_i)\pi(i) + q_{i+1}\pi(i+1) \tag{4}$$

   et donc en réorganisant les termes à gauche et à droite,

   $$\pi(i+1) = \frac{\pi(i)(p_i + q_i) - \pi(i-1)p_{i-1}}{q_{i+1}},$$

   Commençons par la première équation et commme

   $$\pi(1)q_1 - \pi(0) = 0$$

   on a

   $$\pi(1) = \frac{\pi(0)}{q_1}$$

   ce qui donne

   $$\pi(2) = \frac{\pi(1)(p_1 + q_1) - \pi(0)}{q_2} = \frac{\frac{\pi(0)}{q_1}(p_1 + q_1) - \pi(0)}{q_2} = \frac{\pi(0)(p_1 + q_1) - q_1\pi(0)}{q_1 q_2} = \pi(0)\frac{p_1}{q_1 q_2}.$$

   Passons maintenant à

   $$\begin{aligned}\pi(3) = \frac{\pi(2)(p_2 + q_2) - \pi(1)p_1}{q_3} &= \frac{\pi(0)\frac{p_1}{q_1 q_2}(p_2 + q_2) - \pi(0)\frac{1}{q_1}p_1}{q_3} \\ &= \frac{\pi(0)p_1(p_2 + q_2) - q_1 q_2 \pi(1)\frac{1}{q_1}p_1}{q_1 q_2 q_3} \\ &= \frac{\pi(0)p_1(p_2 + q_2) - q_2\pi(1)p_1}{q_1 q_2 q_3} \\ &= \pi(0)\,\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2 q_3}\end{aligned}$$

3. on appelle ces deux équations des "barrières réfléchissantes".

Essayons encore avec

$$\begin{aligned}\pi(4) = \frac{\pi(3)(p_3+q_3)-\pi(2)p_2}{q_4} &= \frac{\pi(0)\frac{p_1p_2}{q_1q_2q_3}(p_3+q_3)-\pi(0)\frac{p_1}{q_1q_2}p_2}{q_4} \\ &= \frac{\pi(0)p_1p_2(p_3+q_3)-q_1q_2q_3\pi(0)\frac{p_1}{q_1q_2}p_2}{q_1q_2q_3q_4} \\ &= \frac{\pi(0)p_1p_2(p_3+q_3)-q_3\pi(0)p_1p_2}{q_1q_2q_3q_4} \\ &= \pi(0)\,\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3q_4}\end{aligned}$$

En continuant ainsi, on voit que l'on a une formule générale qui apparaît :

$$\pi(j) = \pi(0)\,\frac{p_1p_2p_3\cdots p_{j-1}}{q_1q_2q_3q_4\cdots q_j}$$

On a en particulier

$$\pi(N-1) = \pi(0)\,\frac{p_1p_2p_3\cdots p_{N-2}}{q_1q_2q_3q_4\cdots q_{N-1}}$$

et donc

$$\pi(N) = \pi(0)\,\frac{p_1p_2p_3\cdots p_{N-2}p_{N-1}}{q_1q_2q_3q_4\cdots q_{N-1}}$$

L'inconnue $\pi(0)$ est déterminée par l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\pi(i) = 1$ (car π est une probabilité), ce qui donne,

$$\pi(0) = \frac{1}{\left\{1+\frac{1}{q_1}+\frac{p_1}{q_1q_2}+\cdots+\frac{p_1p_2\cdots p_{N-1}}{q_1q_2\cdots q_{N-1}q_N}\right\}}$$

en notant que $q_N = 1$ dans la matrice de transition.

2. Donner une interprétation de cette chaîne dans le cas d'une file d'attente dans un hopital.