Université Lyon 2 — Probabilité

Licence 2 MIASHS

TD3 : Exercices sur les lois de probabilités sur les entiers et sur la droite réelle.

Exercice 1 On considère la loi de Bernoulli sur l'ensemble $\Omega = \{0, 1\}$, spécifiée par

$$\mathbb{P}(\{1\}) = p \quad \text{ et } \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p.$$

On note la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

1. Enumérez tous les événements possibles sur Ω et donner leur probabilité.
2. On appelle premier moment de la loi de Bernoulli la valeur $m_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} k\ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_1 en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto m_1$.
3. On appelle second ou deuxième moment de la loi de Bernoulli la valeur $m_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} k^2\ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_2 en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto m_2$.
4. On appelle la variance de la loi de Bernoulli la valeur $\sigma^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} (k - m_1)^2\ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de σ^2 en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto \sigma^2$.
5. On appelle entropie de la loi de Bernoulli la valeur $\mathcal{E} = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \mathbb{P}(\{k\})\ \ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}(\{k\})}\right)$. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{E}$ en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto \mathcal{E}$.

Exercice 2 On considère la loi uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, \ldots, K\}$, c'est la dire la loi qui assigne à l'événement $\{k\}$ la probabilité $\mathbb{P}(\{k\}) = 1/K$. On note $\mathcal{U}(\Omega)$, la loi uniforme sur Ω.

1. Calculer le premier moment m_1 de la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, K\}$, donné par $m_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} k\, \mathbb{P}(\{k\})$.
2. Calculer le second moment m_2 de la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, K\}$, donné par $m_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} k^2\, \mathbb{P}(\{k\})$. On utilisera la formule

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. La variance de la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, K\}$ est donnée par $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{K} (k - m_1)^2 \ \mathbb{P}(\{k\})$. Montrer que $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Calculer alors σ^2.

Exercice 3 On considère la loi de Poisson de paramètre λ sur l'ensemble $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$, spécifiée par

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \exp(-\lambda) \ \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots.$$

On note la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donnez toutes les dérivées $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, etc ... de la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$ en 0. Lorsqu'il est possible de le définir pour une fonction suffisamment sympa, le développement de Taylor d'une fonction est

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) x^3 + \frac{1}{4!} f''''(0) x^4 + \cdots$$

   Montrez que dans le cas de la fonction exponentielle, on a [1]

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. On appelle premier moment de la loi de Poisson la valeur $m_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} k \ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_1 en fonction de λ. Représenter la fonction $\lambda \mapsto m_1$.
3. On appelle second ou deuxième moment de la loi de Poisson la valeur $m_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_2 en fonction de λ. Représenter la fonction $\lambda \mapsto m_2$.
4. On appelle la variance de la loi de Poisson la valeur $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - m_1)^2 \ \mathbb{P}(\{k\})$. Montrez que $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Calculer la valeur exacte de σ^2 en fonction de λ. Représenter la fonction $\lambda \mapsto \sigma^2$.

Exercice 4 On considère maintenant l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}_+$. Contrairement aux exemples précédents, on ne peut pas énumérer l'un après l'autres les éléments de l'ensemble Ω et on dit que Ω n'est pas dénombrable. On considère la loi exponentielle de paramètre λ qui pour tout intervalle $[a, b)$ est spécifiée par

$$\int_{[a,b)} \lambda \exp(-\lambda x) \ dx.$$

On note la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. une formule très importante pour énormément d'applications

1. Calculez
$$\int_{[0,+\infty)} \lambda \exp(-\lambda x)\ dx.$$
Est-ce que le résultat est surprenant ?
2. Pour tout a, $b \in \Omega$, calculer
$$\int_{[a,b]} \lambda \exp(-\lambda x)\ dx.$$
On note la loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
3. On appelle le premier moment m_1 de la loi exponentielle la quantité
$$m_1 = \int_{[0,+\infty)} x\lambda \exp(-\lambda x)\ dx.$$
On utilisera pour cela la formule d'intégration par parties :
$$\int_{[a,b)} f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{[a,b)} f'(x)g(x)dx.$$
4. On appelle le second moment m_2 de la loi exponentielle la quantité
$$m_2 = \int_{[0,+\infty)} x^2\lambda \exp(-\lambda x)\ dx.$$
On utilisera pour cela à nouveau la formule d'intégration par parties.

Exercice 5 On considère maintenant $\Omega = \mathbb{R}$. La loi Gaussienne sur $\Omega = \mathbb{R}$ est spécifiée sur tous les intervalles $[a, b)$ de $\mathbb{R}$ par la formule
$$\int_{[a,b)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx.$$
On admettra que le premier moment de la loi Gaussienne est
$$\int_{(-\infty,\infty)} x\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx\mu$$
et que la variance de la loi Gaussienne est
$$\int_{(-\infty,\infty)} (x-m_1)^2\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx = \sigma^2.$$

1. Regarder une représentation de la fonction
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
sur internet (Wolfram alpha par exemple). Cette fonction admet-elle des symétries particulières ?

2. Y-a-t-il une relation entre la probabilité de l'événement $(-\infty, a]$ et celle de l'événement $[-a, +\infty)$?
3. A-t-on, pour tous a, b, c tels que $a < b < c$, la relation

$$\int_{(a,c]} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{(a,b]} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx + \int_{(b,c]} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx?$$

4. Regarder dans la table de la loi Gaussienne la probabilité de l'événement $(-\infty, 0]$, et de l'événement $(-\infty, 1]$ puis de l'événement $(-\infty, 1]$ lorsque $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$ (on appelle la loi Gaussienne correspondante la loi Gaussienne centrée réduite).