Université Lyon 2 Probabilité
Licence 2 MIASHS

TD3 : Exercices sur les lois de probabilités sur les entiers et sur la droite réelle.

Exercice 1 On considère la loi de Bernoulli sur l'ensemble $\Omega = \{0, 1\}$, spécifiée par

$$\mathbb{P}(\{1\}) = p \quad \text{et } \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p.$$

On note la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

1. Enumérez tous les événements possibles sur Ω et donner leur probabilité.
   Les événements possibles sont toutes les parties de Ω, c'est-à-dire
   $$\varnothing, \quad \{0\}, \quad \{1\}, \quad \Omega = \{0, 1\}.$$
   Leurs probabilités sont
   $$\mathbb{P}(\varnothing) = 0, \qquad \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = p, \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

2. On appelle premier moment de la loi de Bernoulli la valeur $m_1 = \sum_{k=0}^{1} k\ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_1 en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto m_1$.
   On a
   $$m_1 = 0 \times \mathbb{P}(\{0\}) + 1 \times \mathbb{P}(\{1\}) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$
   Donc
   $$m_1 = p.$$
   La représentation de $p \mapsto m_1$ est la droite d'équation $y = p$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

3. On appelle second ou deuxième moment de la loi de Bernoulli la valeur $m_2 = \sum_{k=0}^{1} k^2\ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_2 en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto m_2$.
   Comme $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, on obtient
   $$m_2 = 0^2 \times \mathbb{P}(\{0\}) + 1^2 \times \mathbb{P}(\{1\}) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$
   Donc
   $$m_2 = p.$$
   La représentation de $p \mapsto m_2$ est encore la droite d'équation $y = p$ sur $[0, 1]$.

4. On appelle la variance de la loi de Bernoulli la valeur $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{1}(k - m_1)^2\, \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de σ^2 en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto \sigma^2$.
Comme $m_1 = p$, on a

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (0-p)^2\,\mathbb{P}(\{0\}) + (1-p)^2\,\mathbb{P}(\{1\})\\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p\\ &= p(1-p)\big(p + (1-p)\big)\\ &= p(1-p).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sigma^2 = p(1-p) = p - p^2.$$

C'est une parabole concave, nulle en $p = 0$ et $p = 1$, et maximale en $p = \frac{1}{2}$ avec valeur $\frac{1}{4}$.

5. On appelle entropie de la loi de Bernoulli la valeur $\mathcal{E} = \sum_{k=0}^{1} \mathbb{P}(\{k\})\ \ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}(\{k\})}\right)$. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{E}$ en fonction de p. Représenter la fonction $p \mapsto \mathcal{E}$.
On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= (1-p)\ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + p\ln\left(\frac{1}{p}\right)\\ &= -(1-p)\ln(1-p) - p\ln(p).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{E}(p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p),$$

avec la convention usuelle $0\ln(0) = 0$ par passage à la limite. Cette fonction est concave, symétrique par rapport à $p = \frac{1}{2}$, nulle en $p = 0$ et $p = 1$, et maximale en $p = \frac{1}{2}$ avec valeur

$$\mathcal{E}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

Exercice 2 On considère la loi uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, \ldots, K\}$, c'est la dire la loi qui assigne à l'événement $\{k\}$ la probabilité $\mathbb{P}(\{k\}) = 1/K$. On note $\mathcal{U}(\Omega)$, la loi uniforme sur Ω.

1. Calculer le premier moment m_1 de la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, K\}$, donné par $m_1 = \sum_{k=1}^{K} k\,\mathbb{P}(\{k\})$.

Comme $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{K}$ pour tout k, on a

$$m_1 = \sum_{k=1}^{K} k\,\frac{1}{K} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} k = \frac{1}{K}\cdot\frac{K(K+1)}{2} = \frac{K+1}{2}.$$

Donc

$$m_1 = \frac{K+1}{2}.$$

2. Calculer le second moment m_2 de la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, K\}$, donné par $m_2 = \sum_{k=1}^{K} k^2 \, \mathbb{P}(\{k\})$.

   On utilisera la formule

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   On a

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{k=1}^{K} k^2 \, \frac{1}{K} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} k^2 = \frac{1}{K} \cdot \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} \\ &= \frac{(K+1)(2K+1)}{6}. \end{aligned}$$

   Donc

$$m_2 = \frac{(K+1)(2K+1)}{6}.$$

3. La variance de la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, K\}$ est donnée par $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{K} (k - m_1)^2 \, \mathbb{P}(\{k\})$.

   Montrer que $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Calculer alors σ^2.
   En développant le carré,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{k=1}^{K} (k - m_1)^2 \, \mathbb{P}(\{k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \big(k^2 - 2km_1 + m_1^2\big) \mathbb{P}(\{k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{K} k^2 \mathbb{P}(\{k\}) - 2m_1 \sum_{k=1}^{K} k \mathbb{P}(\{k\}) + m_1^2 \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\{k\}) \\ &= m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 = m_2 - m_1^2. \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(K+1)(2K+1)}{6} - \left(\frac{K+1}{2}\right)^2 \\ &= (K+1) \left(\frac{2K+1}{6} - \frac{K+1}{4}\right) \\ &= (K+1) \cdot \frac{4K + 2 - 3K - 3}{12} \\ &= \frac{(K+1)(K-1)}{12} = \frac{K^2 - 1}{12}. \end{aligned}$$

Ainsi
$$\sigma^2 = \frac{K^2-1}{12}.$$

Exercice 3 On considère la loi de Poisson de paramètre λ sur l'ensemble $\Omega = \{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N}$, spécifiée par
$$\mathbb{P}(\{k\}) = \exp(-\lambda)\,\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$
On note la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donnez toutes les dérivées $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, etc ... de la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$ en 0. Lorsqu'il est possible de le définir pour une fonction suffisamment sympa, le développement de Taylor d'une fonction est
$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f''''(0)x^4 + \cdots$$
Montrez que dans le cas de la fonction exponentielle, on a [1]
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$
Pour la fonction $f(x) = \exp(x)$, toutes les dérivées sont égales à $\exp(x)$. Donc, en 0,
$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 1, \qquad f'''(0) = 1, \quad \ldots$$
Ainsi, le développement de Taylor en 0 devient
$$\begin{aligned}\exp(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

2. On appelle premier moment de la loi de Poisson la valeur $m_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} k\ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_1 en fonction de λ. Représenter la fonction $\lambda \mapsto m_1$.
On calcule
$$\begin{aligned}m_1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

1. une formule très importante pour énormément d'applications

Donc

$$m_1 = \lambda.$$

La représentation de $\lambda \mapsto m_1$ est la droite d'équation $y = \lambda$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. On appelle second ou deuxième moment de la loi de Poisson la valeur $m_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}(\{k\})$. Calculer la valeur exacte de m_2 en fonction de λ. Représenter la fonction $\lambda \mapsto m_2$.
On utilise l'identité $k^2 = k(k-1) + k$. Alors

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + m_1 = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Donc

$$m_2 = \lambda^2 + \lambda.$$

La représentation de $\lambda \mapsto m_2$ est la parabole d'équation $y = \lambda^2 + \lambda$.

4. On appelle la variance de la loi de Poisson la valeur $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - m_1)^2 \ \mathbb{P}(\{k\})$. Montrez que $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Calculer la valeur exacte de σ^2 en fonction de λ. Représenter la fonction $\lambda \mapsto \sigma^2$.
Comme dans l'exercice précédent,

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

En remplaçant par les valeurs trouvées,

$$\sigma^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Donc

$$\sigma^2 = \lambda.$$

La représentation de $\lambda \mapsto \sigma^2$ est la droite d'équation $y = \lambda$. Pour une loi de Poisson, l'espérance et la variance sont égales.

Exercice 4 On considère maintenant l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}_+$. Contrairement aux exemples précédents, on ne peut pas énumérer l'un après l'autres les éléments de l'ensemble Ω et on dit que Ω n'est pas dénombrable. On considère la loi exponentielle de paramètre λ qui pour tout intervalle $[a, b)$ est spécifiée par

$$\int_{[a,b)} \lambda \exp(-\lambda x) \ dx.$$

On note la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Calculez
$$\int_{[0,+\infty)} \lambda \exp(-\lambda x)\, dx.$$
Est-ce que le résultat est surprenant ?
On calcule
$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$
Ce résultat n'est pas surprenant : la densité d'une loi de probabilité doit avoir une masse totale égale à 1.
2. Pour tout a, $b \in \Omega$, calculer
$$\int_{[a,b]} \lambda \exp(-\lambda x)\, dx.$$
Pour $0 \leq a \leq b$,
$$\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$
Donc
$$\int_{[a,b]} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$
3. On appelle le premier moment m_1 de la loi exponentielle la quantité
$$m_1 = \int_{[0,+\infty)} x\lambda \exp(-\lambda x)\, dx.$$
On utilisera pour cela la formule d'intégration par parties :
$$\int_{[a,b)} f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{[a,b)} f'(x)g(x)dx.$$
Posons $f(x) = x$ et $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, donc $f'(x) = 1$ et $g(x) = -e^{-\lambda x}$. Alors
$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx. \end{aligned}$$
Or $xe^{-\lambda x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, donc le terme de bord vaut 0. Il reste
$$m_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$
Ainsi
$$m_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

4. On appelle le second moment m_2 de la loi exponentielle la quantité
$$m_2 = \int_{[0,+\infty)} x^2 \lambda \exp(-\lambda x)\, dx.$$
On utilisera pour cela à nouveau la formule d'intégration par parties.
Posons cette fois $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, donc $f'(x) = 2x$ et $g(x) = -e^{-\lambda x}$. Alors
$$\begin{aligned} m_2 &= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx. \end{aligned}$$
Le terme de bord vaut encore 0, donc
$$m_2 = 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx.$$
Or
$$\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{m_1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}.$$
Par conséquent,
$$m_2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$
On peut en déduire la variance :
$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 5 On considère maintenant $\Omega = \mathbb{R}$. La loi Gaussienne sur $\Omega = \mathbb{R}$ est spécifiée sur tous les intervalles $[a, b)$ de $\mathbb{R}$ par la formule
$$\int_{[a,b)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$
On admettra que le premier moment de la loi Gaussienne est
$$\int_{(-\infty,\infty)} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu$$
et que la variance de la loi Gaussienne est
$$\int_{(-\infty,\infty)} (x-m_1)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2.$$

1. Regarder une représentation de la fonction
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
sur internet (Wolfram alpha par exemple). Cette fonction admet-elle des symétries particulières ?
Oui. La courbe est en cloche et elle est symétrique par rapport à la droite verticale $x = \mu$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi(\mu + t) = \phi(\mu - t).$$
En particulier, si $\mu = 0$, la densité est paire : $\phi(-x) = \phi(x)$.
2. Y-a-t-il une relation entre la probabilité de l'événement $(-\infty, a]$ et celle de l'événement $[-a, +\infty)$ lorsque $\mu = 0$?
Oui. Lorsque $\mu = 0$, la densité est symétrique par rapport à 0, donc
$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq -a).$$
Comme une loi gaussienne est continue, $\mathbb{P}(X = -a) = 0$, donc on peut écrire aussi
$$\mathbb{P}((-\infty, a]) = \mathbb{P}([-a, +\infty)).$$
3. A-t-on, pour tous a, b, c tels que $a < b < c$, la relation
$$\int_{(a,c]} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{(a,b]} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx + \int_{(b,c]} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx?$$
Oui. En effet,
$$(a, c] = (a, b] \cup (b, c],$$
et ces deux intervalles sont disjoints. L'intégrale d'une fonction intégrable sur une union disjointe est la somme des intégrales sur chaque morceau. On a donc bien
$$\int_{(a,c]} x\phi(x)\, dx = \int_{(a,b]} x\phi(x)\, dx + \int_{(b,c]} x\phi(x)\, dx.$$
4. Regarder dans la table de la loi Gaussienne la probabilité de l'événement $(-\infty, 0]$, et de l'événement $(-\infty, 1]$ puis de l'événement $(-\infty, 1]$ lorsque $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$ (on appelle la loi Gaussienne correspondante la loi Gaussienne centrée réduite).
Pour la loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, la table donne
$$\mathbb{P}(X \leq 0) = 0{,}5$$
et
$$\mathbb{P}(X \leq 1) \approx 0{,}8413.$$
Autrement dit, environ 84,13% de la masse de probabilité se trouve à gauche de 1.