Université Lyon 2 — Probabilité
Licence 2 MIASHS

TD4 : Exercices sur les variables aléatoires et leurs lois de probabilités sur les entiers et sur la droite réelle.

Exercice 1 On considère une variable aléatoire X de Bernoulli, dont la loi est spécifiée par

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p \quad \text{ et } \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p.$$

On note la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer la variance de X.
3. On ajoute une autre variable aléatoire X' à X, indépendante de X et de même loi.
   (a) Donner l'espérance de $X + X'$.
   (b) Donner la variance de $X + X'$.
   (c) Donner la loi de $X + X'$.

Exercice 2 On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, \ldots, K\}$, c'est la dire la loi qui assigne à l'événement $\{X = k\}$ la probabilité $\mathbb{P}(\{X = k\}) = 1/K$. On note $X \sim \mathcal{U}(\Omega)$.

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer la variance de X.
3. On ajoute une autre variable aléatoire X' à X, indépendante de X et de même loi.
   (a) Donner l'espérance de $X + X'$.
   (b) Donner la variance de $X + X'$.
   (c) Donner la loi de $X + X'$ (attention, cette question est un peu longue et on peut la sauter en première lecture puis y revenir à la fin du TD).

Exercice 3 On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ sur l'ensemble $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$, spécifiée par

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \exp(-\lambda)\, \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer la variance de X.
3. On ajoute une autre variable aléatoire X' à X, indépendante de X et de même loi.
   (a) Donner l'espérance de $X + X'$
   (b) Donner la variance de $X + X'$
   (c) Donner la loi de $X + X'$ en supposant que la loi d'une somme de deux variables Poissonniennes indépendantes est encore une variable de Poisson.

Exercice 4 On considère une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ qui pour tout intervalle $[a, b)$ est spécifiée par

$$\int_{[a,b)} \lambda \exp(-\lambda x)\ dx.$$

On note la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Donner l'espérance et la variance de X
2. On ajoute une autre variable aléatoire X' à X, indépendante de X et de même loi.
   (a) Donner l'espérance de $X + X'$.
   (b) Donner la variance de $X + X'$.
   (c) Donner la loi de $X + X'$ en supposant que la somme de deux variables exponentielles indépendantes est encore une variables exponentielle.

Exercice 5 On considère maintenant $\Omega = \mathbb{R}$. La loi Gaussienne sur $\Omega = \mathbb{R}$ est spécifiée sur tous les intervalles $[a, b)$ de $\mathbb{R}$ par la formule

$$\int_{[a,b)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx.$$

On admettra que le premier moment de la loi Gaussienne est

$$\int_{(-\infty,\infty)} x\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx\mu$$

et que la variance de la loi Gaussienne est

$$\int_{(-\infty,\infty)} (x-m_1)^2\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx = \sigma^2.$$

1. Donner l'espérance et la variance de X
2. On ajoute une autre variable aléatoire X' à X, indépendante de X et de même loi.
   (a) Donner l'espérance de $X + X'$.
   (b) Donner la variance de $X + X'$.

(c) Donner la loi de $X + X'$ en supposant que la somme de deux variables gaussiennes indépendantes est encore une variable gaussienne.

Exercice 6 La fonction de répartition d'une variable Gaussienne $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ vaut

$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2 du$$

On note

$$\Phi(x) = F_{0,1}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\left(\frac{u^2}{2}\right) du$$

la fonction de répartition associée à une variable Gaussienne centrée réduite.

1. Comment peut-on calculer la probabilité
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$
à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite ?
2. Calculer
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$
pour $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$, $a = -\infty$ et $b = 3$
3. Calculer
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$
pour $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$, $a = 3$ et $b = +\infty$.
4. Calculer
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$
pour $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$, $a = -1$ et $b = 2$
5. Refaire les mêmes calculs pour $\mu = 5$ et $\sigma^2 = 4$.
6. (Pour ceux qui aiment bien les intégrales !) En posant
$$z = \frac{u-\mu}{\sigma}$$
dans
$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} du$$
et en effectuant ce changement de variable dans l'intégrale, peut-on dire que
$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) ?$$