Zied GHARBI

Université Lumière Lyon2

TD 4 : Probabilités
Licence 1 MIASHS

Exercice 1

Quelle loi permet de modéliser les expériences suivantes ? Donner les valeurs des paramètres associés.

1. Lancer 5 fois de suite un dé. On s'intéresse au nombre de fois où on a la face "3".

   On souhaite modéliser le nombre de succès (obtenir la face "3") dans une série de n tirage indépendants avec une probabilité du succès π à chaque tirage.

   $\rightsquigarrow$ **Loi Binomiale avec paramètres** :

   - $n = 5$ (nombre de lancers)
   - $\pi = \dfrac{1}{6}$ (probabilité d'obtenir la face 3)

2. Tirer une boule au hasard dans une urne contenant 3 boules : une blanche et 2 noires. On s'intéresse à la boule blanche.

   On souhaite modéliser une expérience à deux issues possibles (sucées ou échec) avec une probabilité π.

   $\rightsquigarrow$ **Loi Bernoulli avec paramètre** :

   - $\pi = \dfrac{1}{3}$ (probabilité d'obtenir une boule blanche)

3. Une famille comporte 5 enfants. On s'intéresse au nombre de filles. (NB : On considère qu'une naissance est un tirage au sort avec deux possibilités équiprobables : fille ou garçon).

   On souhaite modéliser le nombre de succès (avoir une fille) dans une série de n tirage indépendants avec une probabilité du succès π à chaque tirage.

   $\rightsquigarrow$ **Loi Binomiale avec paramètres** :

   - $n = 5$ (nombre d'enfants)
   - $\pi = \dfrac{1}{2}$ (probabilité d'avoir une fille à chaque naissance)

4. Supposons qu'un centre d'appels reçoit en moyenne 3 appels par heure. On s'intéresse à modéliser le nombre d'appels reçu en une heure.

   On souhaite modéliser un événement qui se répète n fois dans un intervalle de temps fixe.

   $\rightsquigarrow$ **Loi de Poisson avec paramètres** :

   - $\lambda = 3$ (nombre d'appel moyen par heure)

Exercice 2

Pendant une période d'épidémie, l'incidence des infections associées aux soins (IAS) est estimée à 1/semaine dans un service donné.

1. Calculer la probabilité d'observer exactement 5 IAS en 1 mois.

Données :

- Taux d'incidence de IAS : $\lambda = 1$ infections par semaine.
- Période d'observation : 1 mois (on suppose 4 semaines).
- Nombre d'IAS observé : $k = 5$

Étape 1 : calcul du taux moyen par mois

$$\lambda_{mois} = \lambda \times 4 = 1 \times 4 = 4$$

Étape 2 : calcul du la probabilité d'observer exactement $k = 5$ IAS en 1 mois :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-4} \times 4^5}{5!} \approx 0.1562$$

La probabilité d'observer exactement 5 IAS en 1 mois est d'environ 15.62%.

Exercice 3

Le nombre annuel de pannes d'une machine suit une loi de Poisson de paramètre 3. Quelle est la probabilité pour que cette machine ait au moins 2 pannes dans l'année ?

- Paramètre de la loi poisson : $\lambda = 3$
- $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$

$$P(X \geq 2) \quad = \quad 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

avec

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} = e^{-3} \approx 0.0498$$

et

$$P(X = 1) = \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} = 3e^{-3} \approx 3 \times 0.0498 \approx 0.1494$$

donc

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.0498 - 0.1494 = 0.8008$$

La probabilité que la machine ait au moins 2 pannes dans l'année est d'environ 80.08%.

Exercice 4

La probabilité qu'un comprimé tiré au hasard sur une chaîne de production soit conforme est égale à $0,85$. Le médicament est commercialisé dans une boîte de 10 comprimés. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à une boîte de 10 comprimés, associe le nombre de comprimés conformes qu'il contient.

1. Quelles sont les réalisations de cette variable aléatoire ? La variable Y représente le nombre de comprimés conforme dans une boite de 10. Les réalisation possible de Y

$$Y \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$$

2. Quelle est la loi de Y ? Pourquoi ? La variable aléatoire Y suit une loi binomiale avec paramètre :

   - $n = 10$ (nombre de comprimés dans la boite)
   - $\pi = 0.85$ probabilité d'avoir un comprimé conforme

   Chaque comprimé est un tirage indépendant avec deux issues possible : conforme (succès) ou non conforme (échec).
   La probabilité du succès est données par $\pi = 0.85$.

3. Que valent l'espérance, la variance et l'écart-type de cette loi de probabilité ?

   1. Espérance :
   $$E(Y) = n \times \pi = 10 \times 0.85 = 8.5$$
   2. Variance :
   $$Var(Y) = n \times \pi \times (1 - \pi) = 10 \times 0.85 \times 0.15 = 1.275$$
   3. Écart-type :
   $$\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{1.275} \approx 1.129$$

4. Calculer $P(Y \geq 9)$ La probabilité que la boite contienne au moins 9 comprimés conformes.

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$$

ou $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial.

$$P(Y \geq 9) = P(Y = 9) + P(Y = 10)$$

avec,

$$\begin{aligned} P(Y = 9) &= \binom{10}{9} \times 0.85^9 \times (1 - 0.85)^{10-9} \\ &= \frac{10!}{9!(10-9)!} \times 0.85^9 \times 0.15^1 \\ &= 10 \times 0.2316 \times 0.15 \approx 0.3474 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(Y = 10) &= \binom{10}{10} \times 0.85^{10} \times (1 - 0.85)^{10-10} \\ &= \frac{10!}{10!(10-10)!} \times 0.85^{10} \times 0.15^0 \\ &= 1 \times 0.1969 \times 1 \approx 0.1969 \end{aligned}$$

Donc

$$P(Y \geq 9) \approx 0.3474 + 0.1969 = 0.5443$$

La probabilité que la boîte contienne au moins 9 comprimés conformes est d'environ $54,43\%$.

Exercice 5

Selon une étude, le nombre de noyades accidentelles en un an est de 2 pour 100 000 habitants.

1. Quelle est la probabilité, pour une ville de 200 000 habitants, de n'avoir aucune noyade durant cette année ?

   Les noyade accidentelles est un événement rare, on peut utiliser la loi de Poisson

   - 2 noyades pour 100 000 habitants par an, le taux moyen de noyades par an est $\lambda = 2$
   - Pour une population de 200 000 habitants, le taux moyen de noyades par an est $\lambda_2 = \lambda \times 2 = 2 \times 2 = 4$

   $$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

   d'où

   $$P(X = 0) = \frac{e^{-4} \times 4^0}{0!} \approx \frac{0.0183 \times 1}{1} = 0.0183$$

   La probabilité que la ville de 200 000 habitants n'ait aucune noyade dans l'année est environ 1.83%.