

TD4 : Exercices sur les variables aléatoires et leurs lois de probabilités sur les entiers et sur la droite réelle.

**Exercice 1** On considère une variable aléatoire  $X$  de Bernoulli, dont la loi est spécifiée par

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p.$$

On note la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1, p)$ .

1. Calculer l'espérance de  $X$ .

Comme  $X$  ne prend que les valeurs 0 et 1, on a

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

2. Calculer la variance de  $X$ .

On peut utiliser  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ . Or, comme  $X \in \{0, 1\}$ , on a  $X^2 = X$ , donc  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) = p$ . Ainsi

$$\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p).$$

3. On ajoute une autre variable aléatoire  $X'$  à  $X$ , indépendante de  $X$  et de même loi.

- (a) Donner l'espérance de  $X + X'$ .

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X + X') = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X') = p + p = 2p.$$

- (b) Donner la variance de  $X + X'$ .

Comme  $X$  et  $X'$  sont indépendantes, les variances s'additionnent :

$$\text{Var}(X + X') = \text{Var}(X) + \text{Var}(X') = p(1 - p) + p(1 - p) = 2p(1 - p).$$

- (c) Donner la loi de  $X + X'$ .

La variable  $X + X'$  prend les valeurs 0, 1 et 2.

$$\mathbb{P}(X + X' = 0) = \mathbb{P}(X = 0, X' = 0) = (1 - p)^2,$$

$$\mathbb{P}(X + X' = 2) = \mathbb{P}(X = 1, X' = 1) = p^2,$$

$$\mathbb{P}(X + X' = 1) = \mathbb{P}(X = 1, X' = 0) + \mathbb{P}(X = 0, X' = 1) = 2p(1 - p).$$

Autrement dit,  $X + X' \sim \mathcal{B}(2, p)$ , c'est-à-dire une loi binomiale de paramètres 2 et  $p$ .

**Exercice 2** On considère une variable aléatoire  $X$  suivant la loi uniforme sur l'ensemble  $\Omega = \{1, 2, \dots, K\}$ , c'est la dire la loi qui assigne à l'événement  $\{X = k\}$  la probabilité  $\mathbb{P}(\{X = k\}) = 1/K$ . On note  $X \sim \mathcal{U}(\Omega)$ .

1. Calculer l'espérance de  $X$ .

Par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^K k \frac{1}{K} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K k = \frac{1}{K} \cdot \frac{K(K+1)}{2} = \frac{K+1}{2}.$$

2. Calculer la variance de  $X$ .

On calcule d'abord le second moment :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^K k^2 \frac{1}{K} = \frac{1}{K} \cdot \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} = \frac{(K+1)(2K+1)}{6}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(K+1)(2K+1)}{6} - \left(\frac{K+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{K+1}{12} (2(2K+1) - 3(K+1)) = \frac{K+1}{12} (K-1) = \frac{K^2-1}{12}. \end{aligned}$$

3. On ajoute une autre variable aléatoire  $X'$  à  $X$ , indépendante de  $X$  et de même loi.

- (a) Donner l'espérance de  $X + X'$ .

Par linéarité,

$$\mathbb{E}(X + X') = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X') = \frac{K+1}{2} + \frac{K+1}{2} = K+1.$$

- (b) Donner la variance de  $X + X'$ .

Par indépendance,

$$\text{Var}(X + X') = \text{Var}(X) + \text{Var}(X') = 2 \cdot \frac{K^2-1}{12} = \frac{K^2-1}{6}.$$

- (c) Donner la loi de  $X + X'$  (attention, cette question est un peu longue et on peut la sauter en première lecture puis y revenir à la fin du TD).

La somme  $S = X + X'$  prend ses valeurs dans  $\{2, 3, \dots, 2K\}$ . Comme les couples  $(i, j) \in \{1, \dots, K\}^2$  sont équiprobables, on a

$$\mathbb{P}(S = s) = \frac{\#\{(i, j) \in \{1, \dots, K\}^2; i + j = s\}}{K^2}.$$

On compte alors le nombre de couples possibles :

$$\mathbb{P}(S = s) = \begin{cases} \frac{s-1}{K^2}, & \text{si } 2 \leq s \leq K+1, \\ \frac{2K+1-s}{K^2}, & \text{si } K+1 \leq s \leq 2K, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi est donc triangulaire : les probabilités augmentent de 2 à  $K+1$ , puis diminuent de  $K+1$  à  $2K$ .

**Exercice 3** On considère une variable aléatoire  $X$  suivant la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda$  sur l'ensemble  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ , spécifiée par

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1. Calculer l'espérance de  $X$ .

On sait, d'après le TD précédent, que pour une variable de Poisson de paramètre  $\lambda$ ,

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.$$

2. Calculer la variance de  $X$ .

Toujours pour une loi de Poisson, la variance est égale au paramètre :

$$\text{Var}(X) = \lambda.$$

3. On ajoute une autre variable aléatoire  $X'$  à  $X$ , indépendante de  $X$  et de même loi.

- (a) Donner l'espérance de  $X + X'$

Par linéarité,

$$\mathbb{E}(X + X') = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X') = \lambda + \lambda = 2\lambda.$$

- (b) Donner la variance de  $X + X'$

Par indépendance,

$$\text{Var}(X + X') = \text{Var}(X) + \text{Var}(X') = \lambda + \lambda = 2\lambda.$$

- (c) Donner la loi de  $X + X'$  en supposant que la loi d'une somme de deux variables Poissonniennes indépendantes est encore une variable de Poisson.

Si  $X + X'$  suit encore une loi de Poisson, son paramètre est nécessairement égal à son espérance, donc vaut  $2\lambda$ . Par conséquent

$$X + X' \sim \mathcal{P}(2\lambda).$$

C'est d'ailleurs un résultat classique : la somme de deux variables de Poisson indépendantes de paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

**Exercice 4** On considère une variable aléatoire  $X$  de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  qui pour tout intervalle  $[a, b)$  est spécifiée par

$$\int_{[a,b)} \lambda \exp(-\lambda x) dx.$$

On note la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

1. Donner l'espérance et la variance de  $X$

Pour une variable exponentielle de paramètre  $\lambda$ , on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. On ajoute une autre variable aléatoire  $X'$  à  $X$ , indépendante de  $X$  et de même loi.

- (a) Donner l'espérance de  $X + X'$ .

Par linéarité,

$$\mathbb{E}(X + X') = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

- (b) Donner la variance de  $X + X'$ .

Par indépendance,

$$\text{Var}(X + X') = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

- (c) Donner la loi de  $X + X'$  en supposant que la somme de deux variables exponentielles indépendantes est encore une variables exponentielle.

Attention : cette hypothèse est en réalité fausse. La somme de deux variables exponentielles indépendantes de même paramètre  $\lambda$  ne suit pas une loi exponentielle, mais une loi Gamma (ou Erlang) de paramètre de forme 2 et de taux  $\lambda$ , de densité

$$f_{X+X'}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

On peut d'ailleurs le voir à partir de l'espérance et de la variance : si  $X + X'$  était exponentielle de paramètre  $\theta$ , on aurait à la fois

$$\frac{1}{\theta} = \frac{2}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\theta^2} = \frac{2}{\lambda^2},$$

ce qui est impossible. Donc la bonne réponse est :  $X + X'$  n'est pas exponentielle.

**Exercice 5** On considère maintenant  $\Omega = \mathbb{R}$ . La loi Gaussienne sur  $\Omega = \mathbb{R}$  est spécifiée sur tous les intervalles  $[a, b)$  de  $\mathbb{R}$  par la formule

$$\int_{[a,b)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

On admettra que le premier moment de la loi Gaussienne est

$$\int_{(-\infty, \infty)} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu$$

et que la variance de la loi Gaussienne est

$$\int_{(-\infty, \infty)} (x - m_1)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2.$$

1. Donner l'espérance et la variance de  $X$

Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors par définition de cette notation,

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

2. On ajoute une autre variable aléatoire  $X'$  à  $X$ , indépendante de  $X$  et de même loi.

- (a) Donner l'espérance de  $X + X'$ .

Par linéarité,

$$\mathbb{E}(X + X') = \mu + \mu = 2\mu.$$

- (b) Donner la variance de  $X + X'$ .

Par indépendance,

$$\text{Var}(X + X') = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2.$$

- (c) Donner la loi de  $X + X'$  en supposant que la somme de deux variables gaussiennes indépendantes est encore une variable gaussienne.

La somme est gaussienne, son espérance vaut  $2\mu$  et sa variance vaut  $2\sigma^2$ . Donc

$$X + X' \sim \mathcal{N}(2\mu, 2\sigma^2).$$

**Exercice 6** La fonction de répartition d'une variable Gaussienne  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  vaut

$$F_{\mu, \sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right) du.$$

On note

$$\Phi(x) = F_{0,1}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

la fonction de répartition associée à une variable Gaussienne centrée réduite.

1. Comment peut-on calculer la probabilité

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite ?

On commence par centrer-réduire la variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Alors

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

On lit donc dans la table les valeurs de  $\Phi$  aux bornes centrées-réduites.

2. Calculer

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

pour  $\mu = 3$ ,  $\sigma^2 = 4$ ,  $a = -\infty$  et  $b = 3$

Ici  $\sigma = 2$ . Donc

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \Phi\left(\frac{3 - 3}{2}\right) = \Phi(0) = 0,5.$$

3. Calculer

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

pour  $\mu = 3$ ,  $\sigma^2 = 4$ ,  $a = 3$  et  $b = +\infty$ .

On a

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

On peut aussi écrire  $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \Phi(0) = 0,5$ .

4. Calculer

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

pour  $\mu = 3$ ,  $\sigma^2 = 4$ ,  $a = -1$  et  $b = 2$

On standardise :

$$\frac{-1 - 3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{2 - 3}{2} = -0,5.$$

Donc

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2) = \Phi(-0,5) - \Phi(-2).$$

Avec la symétrie  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ , cela donne

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(0,5).$$

En utilisant la table :  $\Phi(2) \approx 0,9772$  et  $\Phi(0,5) \approx 0,6915$ , donc

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2) \approx 0,9772 - 0,6915 = 0,2857.$$

5. Refaire les mêmes calculs pour  $\mu = 5$  et  $\sigma^2 = 4$ .

Ici encore  $\sigma = 2$ .

Pour  $a = -\infty$  et  $b = 3$  :

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \Phi\left(\frac{3-5}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

Pour  $a = 3$  et  $b = +\infty$  :

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \approx 0,8413.$$

Pour  $a = -1$  et  $b = 2$  :

$$\frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{et} \quad \frac{2-5}{2} = -1,5.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2) = \Phi(-1,5) - \Phi(-3) = \Phi(3) - \Phi(1,5).$$

Avec la table :  $\Phi(3) \approx 0,9987$  et  $\Phi(1,5) \approx 0,9332$ , d'où

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2) \approx 0,9987 - 0,9332 = 0,0655.$$

6. (Pour ceux qui aiment bien les intégrales!) En posant

$$z = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

dans

$$F_{\mu, \sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu}{\sigma}\right)^2\right) du$$

et en effectuant ce changement de variable dans l'intégrale, peut-on dire que

$$F_{\mu, \sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) ?$$

Oui. En effet, si  $z = \frac{u - \mu}{\sigma}$ , alors  $du = \sigma dz$ . Quand  $u \rightarrow -\infty$ , on a  $z \rightarrow -\infty$ , et quand  $u = x$ , on a  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ . Donc

$$\begin{aligned} F_{\mu, \sigma^2}(x) &= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sigma dz \\ &= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

C'est la formule fondamentale qui permet d'utiliser la table de la loi normale centrée réduite pour toute loi gaussienne.