Université Lumière Lyon 2

Institut de Psychologie

Licence 1 MIASHS

Probabilités et ses applications

2024-2025

Présenté par Zied GHARBI

Parties du cours

1. Théorie de probabilité : notions de base, expérience aléatoire ε, univers de ε, événement, les opérations sur les événements (union, intersection, complémentarité, incompatibilité, complémentarité, inclusion et l'indépendance), notion de probabilité et ces propriétés, probabilités conditionnelles, théorème de Bayes.

2. Combinatoire et probabilités : tirage sans remise et avec remise, le coefficient binomial et la fonction factorielle.

3. La loi de probabilité : la variable aléatoire , modèle aléatoire et la lois usuelles.

Partie 1

Plan partie 1

1. Définitions
2. Les opération sur les événements : Union, intersection, complémentarité, incompatibilité et inclusion
3. Notion de probabilité et ses propriétés
4. Probabilité conditionnelle
5. Indépendance des événements

Définitions

Définitions

* Théorie des probabilités :
  * L'étude mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitu
  * Ensemble d'outils permettant de décrire le comportement de phénomène dont le résultat est soumis au hasard.
  * Permet de modéliser la fréquence de réalisation d'événements aléatoires.

* Expérience aléatoire ε : Expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé avec certitude à priori et si répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents.

Définitions

- Univers de ε : ensemble des résultats possibles de ε. On le note Ω.
  - Univers fini, ex $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$.
  - Univers infini dénombrable : ensemble qu'on peut indicer, numéroter ses éléments jusqu'à l'infini, ex $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.
  - Univers infini non-dénombrable : ensemble qu'il n'est pas possible de décrire l'ensemble sous la forme d'une liste numérotée, ex l'intervalle $[0, 1]$.
- Évènement (résultat) élémentaire de ε : résultat possible de Ω. On le note ω.
- Évènement : sous-ensemble de Ω.

Définitions

Exemples :

- ε : "lancer d'un dé régulier".
  $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} = [|1, 6|]$ ensemble fini.
  $\omega = 2$ est un résultat possible.

- ε : "jet de deux pièces de monnaies distinguables".
  $\Omega = \{(P, P); (P, F); (F, F); (F, P)\}$ ensemble fini.
  $\omega = (P, F)$ est un résultat possible.
- ε : "lancer d'un crayon sur une feuille de papier de dim $l \times L$. Chaque point de la feuille est repéré par son abscisse et son ordonnée".
  $\Omega = \{(x,\ y)$ avec$x \in [0,\ l],\ y \in [0,\ L]\}$ infini non-dénombrable.
  $\omega = (\frac{l}{2},\ \frac{L}{2})$.
- ε : "traiter un patient qui a une douleur avec un médicalement et observer si la douleur cesse (succès du médicament) ou non (échec du médicament)".
  $\Omega = \{$"succès" , "échec$\}$ ensemble fini.
  $\omega =$ "succès".

Définitions

Exercice : Tirer une carte dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements :

- A: obtenir une carte cœur
- B : obtenir un roi
- C : obtenir le valet de pique

Quel(s) événement(s) parmi A, B et C est(sont) un(des) événement(s) élémentaire(s)?

Définitions

Exercice : Tirer une carte dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements :

- A: obtenir une carte cœur
- B : obtenir un roi
- C : obtenir le valet de pique

Quel(s) événement(s) parmi A, B et C est(sont) un(des) événement(s) élémentaire(s)?

$\rightsquigarrow$ Les événements A et B sont des événements élémentaires.

Les opérations sur les événements : Union, intersection, complémentarité, incompatibilité et inclusion

Intersection

Soient A et B deux événements d'un univers Ω :

* L'événement $A \cap B$, intersection de A et B, correspond à l' évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B. Soit ω le résultat de l'expérience :

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$$

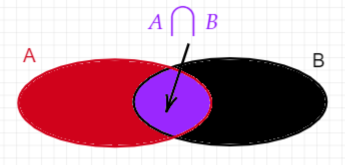


Figure 1

Union

Soient A et B deux événements d'un univers Ω :

* L'évènement $A \cup B$, union de A et B, correspond à l'évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou B (ou aux deux). Soit ω le résultat de l'expérience :

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

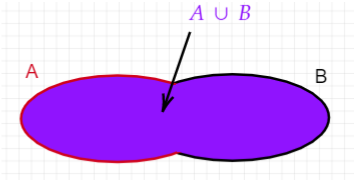


Figure 2

Complémentarité

Soit A un événement d'un univers Ω :

- L'évènement complémentaire de A noté $\bar{A}$, correspond à l'évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A. Soit ω le résultat de l'expérience :

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega, \ \omega \notin A\}$$

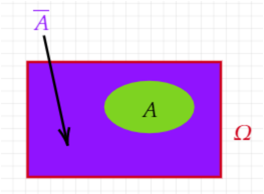


Figure 3

Incompatibilité ou disjonction

Soient A et B deux événements d'un univers Ω :

* Les évènement A et B sont disjoints (incompatibles) ssi n'ont pas d'éléments communs.

$$A \cap B = \emptyset$$

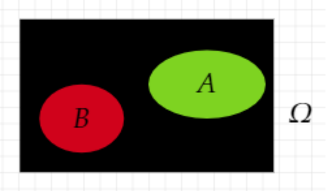


Figure 4

Inclusion

Soient A et B deux événements d'un univers Ω :

* Les évènement A est inclus dans B ssi tout élément de A appartient à B. Soit ω le résultat de l'expérience :

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$$

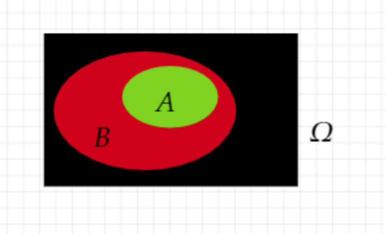


Figure 5

Exemples

Tirer une carte dans un je de 32 cartes. Soient les événements :

A : obtenir une carte cœur

B : obtenir un roi

C : obtenir le valet de pique

Définir les événements suivants $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{C}$

Exemples

Tirer une carte dans un je de 32 cartes. Soient les événements :

A : obtenir une carte cœur

B : obtenir un roi

C : obtenir le valet de pique

Définir les événements suivants $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{C}$

- $A \cap B$: obtenir un roi de cœur.
- $A \cup B$: obtenir un roi ou une carte quelconque cœur.
- $\bar{C}$: obtenir une carte autre que le valet de pique

Notion de probabilité et ses propriétés

Notion de probabilité

- A chaque événement e_i on peut associer un "poids" positif : une probabilité.
- La probabilité est une fonction permettant de "mesurer" la chance de réalisation d'un évènement.
- La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Propriétés d'une probabilité

Soit une expérience aléatoire ε. A et B deux événements quelconques d'un univers Ω. Une probabilité possède les propriétés suivantes:

* $0 \leq P(A) \leq 1$
* $P(\Omega) = 1$
* $P(\emptyset) = 0$
* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
* $A \subset B \quad \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
* En général, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
* Cas spécial : Si A et B sont incompatibles (disjoints) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
* En général : $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
* Cas spécial : Si A et B sont incompatibles (disjoints) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
* $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

Probabilités sur les univers finis

* Un univers **fini** Ω peut s'écrire sous la forme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\}$. On note $card(\Omega)$ le nombre d'éléments de Ω ou le nombre de cas possibles à l'issue de l'expérience aléatoire.

* Dans certains cas ou Ω est un univers fini, on suppose que la probabilité associé à chaque événement élémentaire est identique : $P(\omega_i) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$ pour $i = 1, \cdots, k$. $\rightsquigarrow$ On dit qu'il y a équiprobabilité ou bien les événements élémentaires ω_i sont équiprobables.

* L'hypothèse d'équiprobabilité s'implique aussi pour un événement. $\rightsquigarrow$ La probabilité d'un événement A est le rapport du nombre de cas possibles correspondant à l'événement A noté $card(A)$ sur le nombre de cas possibles, soit :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Probabilités sur les univers finis

Exemple 1: Soit l'expérience "une personne lance un dé cubique à 6 faces non truqué et note la valeur obtenue sur la face supérieurs de ce dé".

Soit, pour $i = 1, 2, \cdots, 6$, l'événement ω_i ="obtenir la valeur i. Supposer l'hypothèse d'équiprobabilité revient à supposer que $P(\omega_i) = \dfrac{1}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

- Pour l'événement B ="obtenir une valeur paire", que vaut $P(B)$?

$$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

- Pour l'événement C ="obtenir une valeur inférieure à 4 ou une valeur paire", que vaut $P(C)$?
  Soit :

  L'événement C' ="obtenir une valeur inférieure à 4".
  L'événement C'' ="obtenir une valeur paire".

  Donc $P(C) = P(C' \cup C'') = P(C') + P(C'') - P(C' \cap C'') = \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

Probabilités sur les univers finis

Exemple 2: On suppose que le dé est truqué de sorte que $P(\omega_1) = \frac{1}{24}$, $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$ pour $i = 2, \cdots, 5$ et $P(\omega_6) = \frac{7}{24}$.

Que valent $P(B)$ et $P(C)$ dans ce cas?

* Pour l'événement $B =$"obtenir une valeur paire".

$$P(B) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{7}{24} = \frac{15}{24}$$

* Pour l'événement $C =$"obtenir une valeur inférieure à 4 ou une valeur paire". Soit :

  L'événement $C' =$"obtenir une valeur inférieur à 4".
  L'événement $C'' =$"obtenir une valeur paire".

  Donc $P(C) = P(C' \cup C'') = P(C') + P(C'') - P(C' \cap C'') = \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{15}{24} - \frac{1}{6} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle : introduction et définition

* On peut partitionner un événement A selon la réalisation ou non d'un autre événement B.
* On suppose que la réalisation de B influence la réalisation de A .
* Alors, la probabilité de réaliser A sachant que B a eu lieu est dite **probabilité conditionnelle de A sachant B**.
* Elle s'écrit $P_B(A) = P(A|B)$.
* Il s'agit du calcul de la probabilité de A dans le sous ensemble réduit B de l'univers Ω.

Probabilité conditionnelle : introduction et définition

* La probabilité de A sachant B est donnée par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) \quad \text{avec } P(B) \neq 0$$

* La probabilité de B sachant A est donnée par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) \quad \text{avec } P(A) \neq 0$$

Remarque !

Ne pas confondre $P_B(A)$ =la probabilité que A se réalise sachant qu'on a observé B avec $P(A \cap B)$ =la probabilité que A et B se réalisent simultanément.

Probabilité conditionnelle : introduction et définition

Exemple : Considérons les chiffres suivants valables pour la France :

* $P(\text{être } VHC_+) = 0,01$
* $P(\text{être } VHC_+$ sachant qu'il y a eu de toxicomanie IV depuis > 5 ans$) > 0,5$
* $P(\text{être } VHC_+$ sachant que la personne est asthmatique$) = 0,01$

Définition

* VHC_+ : atteint d'hépatite C.
* Toxicomanie : apparition d'une douleur thoracique brutale et d'un placard inflammatoire du creux inguinal gauche.

Probabilité conditionnelle : règles de calcul

Soit B un événement fixe.

* $0 \leq P_B(A) \leq 1$ pour tout événement A
* $P_B(\Omega) = 1$
* $P_B(\emptyset) = 0$
* $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes permet d'inverser le conditionnement. On sait que

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$$

Or, par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donc :

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$$

Indépendance en probabilité

Indépendance en probabilité

* Soient A et B deux événements. Si lorsqu'on reçoit l'information que B s'est produit, cela ne modifier pas la probabilité de A. $\rightsquigarrow$ A et B sont indépendants.

* Autrement dit, des événement indépendants n'apportent pas d'information l'un sur l'autre.

* A et B sont indépendants quand
  * $P_B(A) = P(A)$ ou/et $P_A(B) = P(B)$
  * $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

* **Exemples :** L'asthme et le VHC sont indépendants : l'un n'aide pas au diagnostic de l'autre. Soit $P(\text{être } VHC_+) = 1\%$, donc
$P(\text{être} VHC$ sachant que la personne est asthmatique$) = 1\%$

Indépendance en probabilité

* Attention !!!! ne pas confondre des événements incompatibles et des événements indépendants
* **Exemple :** Considérons $A =$"l'enfant à naître est un garçon" et $B =$" l'enfant à naître est une fille".
    1. A et B sont-ils incompatibles?
    2. A et B sont-ils indépendants?

  Solution :
    1. A et B sont incompatibles car $P(A \cap B) = 0$
    2. A et B ne sont pas indépendants car $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$

Exercices

Exercice 1 : Durant l'hiver, la probabilité pour qu'une personne ait la grippe est estimé à 30%. Le diagnostique clinique est posé lorsque la personne présente les symptômes suivants : courbatures, fièvre subite et signes respiratoires. Durant l'hiver, la probabilité pour qu'une personne présente ces symptômes est estimée à 40%. On sait aussi qu'une personne ayant la grippe à 80 chances sur 100 d'avoir ces symptômes.

1. Quelle est la probabilité d'avoir la grippe et de présenter les symptômes décrits ci-dessus?

2. Quelle est la probabilité d'avoir la grippe sachant qu'on présente les symptômes ci-dessus?

Exercices

Solution:

- ⋆ $A =$"Avoir la grippe"
- ⋆ $B =$"Présente les symptômes"

D'après l'énoncer on a :

- ⋆ $P(A) = 0.3$
- ⋆ $P(B) = 0.4$
- ⋆ $P_A(B) = 0.8$

1. Probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$$

2. Deux façons :

   a. $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.24}{0.4} = 0,6$

   b. Théorème de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)} = \dfrac{0,8 \times 0,3}{0,4} = 0,6$

Exercices

Exercice 2 : Un échantillon de 100 tubes d'aluminium est prélevé dans la production de l'usine et chaque tube est classé en fonction de sa longueur (L) et de sa qualité de surface (QS).

Chacune de ces caractéristiques peut être considérée comme "conforme" ou "non conforme".

Les résultats suivants sont obtenus :

	L conforme	L non-conforme
QS conforme	75	7
QS non-conforme	10	8

Soit A l'événement "le tube a une qualité de surface conforme" et soit B l'événement "le tube est de longueur conforme".

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$, $P(\bar{A})$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cup B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Exercices

Correction :

	L conforme	L non-conforme
QS conforme	75	7
QS non-conforme	10	8

Soit A l'événement "le tube a une qualité de surface conforme" et soit B l'événement "le tube est de longueur conforme".

- ⋆ $P(A) = \dfrac{75+7}{100} = 0,82$
- ⋆ $P(B) = \dfrac{75+10}{100} = 0,85$
- ⋆ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,82 = 0,18$
- ⋆ $P(A \cap B) = \dfrac{75}{100} = 0,75$
- ⋆ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,82 + 0,85 - 0,75 = 0,92$
- ⋆ $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \dfrac{10+8}{100} + 0,85 - \dfrac{10}{100} = 0,93$
- ⋆ $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,75}{0,85} \approx 0,88$
- ⋆ $P_A(B) = \dfrac{P_B(A) \times P(B)}{P(B)} = \dfrac{0,88 \times 0,85}{0,82} \approx 0,48.$

Formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales

* Pour deux événements A et B d'un univers Ω, on sait que :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

* Or d'après le théorème de **Bayes**, $P_B(A)$ s'écrit sous la forme :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})}$$

* On a aussi d'après la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)$$

et

$$P(B \cap \bar{A}) = P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$$

* Donc,

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})}$$

* Pour un système complet d'événement $(B, \ \bar{B})$,

$$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$$

Exercice

Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

- 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en fait en état d'ébriété ?

Exercice : correction

On définit les deux événement suivants :

* E "la personne est en état d'ébriété"
* T^+ "le test est positif"

et d'après l'énoncé on peut tirer les informations suivantes :

$$P(E) = 2\% = 0,02 \quad || \quad P_E(T^+) = \frac{95}{100} = 0,95 \quad || \quad P_{\bar{E}}(\bar{T^+}) = \frac{95}{100} = 0,95$$

1. On doit calculer $P_{T^+}(E)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_{T^+}(E) = \frac{P_E(T^+) \times P(E)}{P(T^+)}$$

D'après la formule de la probabilité totale relativement au système complet d'événements $(E,\ \bar{E})$, on a :

$$P(T^+) = P_E(T^+) \times P(E) + P_{\bar{E}}(T^+) \times P(\bar{E})$$

Or $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,02 = 0,98$ et $P_{\bar{E}}(T^+) = 1 - P_{\bar{E}}(\bar{T^+}) = 1 - 0,95 = 0,05$

Donc $P(T^+) = 0,95 \times 0,02 + 0,05 \times 0,98 = 0,068$

$$\hookrightarrow P_{T^+}(E) = \frac{0,95 \times 0,02}{0,068} \approx 0,279$$

Exercice : correction

$P(E) = 2\% = 0,02 \quad || \quad P_E(T^+) = \dfrac{95}{100} = 0,95 \quad || \quad P_{\bar{E}}(\bar{T^+}) = \dfrac{95}{100} = 0,95 \quad || \quad P(\bar{E}) = 0,98 \quad || \quad P(T^+) = 0,068 \quad || \quad P_{T^+}(E) = 0,279 \quad || \quad P_{\bar{E}}(T^+) = 0,05$

2. On doit calculer $P_{\bar{T^+}}(E)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_{\bar{T^+}}(E) = \frac{P_E(\bar{T^+}) \times P(E)}{P(\bar{T^+})}$$

avec

$$P_E(\bar{T^+}) = 1 - P_E(T^+) = 1 - 0,95 = 0,05$$

et

$$P(\bar{T^+}) = 1 - P(T^+) = 1 - 0,068 = 0,932$$

Donc

$$P_{\bar{T^+}}(E) = \frac{0,05 \times 0,02}{0,932} \approx 0,0011$$

Partie 2 : Combinatoire et probabilités

Plan partie 2

1. Définitions
2. Tirage de p élément parmi n
3. Le coefficient binomial
4. Factorielle
5. Exemple

Définition

- La combinatoire (ou analyse combinatoire) est l'étude des ensembles finis du point de vue du nombre de leurs éléments.
- Elle porte sur le dénombrement de configurations d'objets satisfaisant des conditions données.
- La combinatoire sert d'outil dans plusieurs problèmes élémentaires en théorie des probabilités.

Tirage de p éléments parmi n

2 types de tirage :

1. Avec remise
2. Sans remise

On considère une expérience aléatoire définie par le tirage au sort de p individus parmi n pour laquelle chaque groupe de p sujets possible a la même probabilité d'être constitué.

* $E =$ensemble de tous les échantillons possibles de p sujets parmi n.
* $Card(E)$ est le nombre d'échantillons possibles.
* Par définition, on a donc : $P(\text{un échantillon}) = 1/Card(E)$.

Selon que le tirage au sort ait été effectué avec ou sans remise, on obtient différentes expressions de $Card(E)$.

Tirage de p éléments parmi n et le coefficient binomial

- **Tirage au sort avec remise :** on effectue plusieurs fois la même expérience de façon indépendante.

- On tire p fois 1 sujets parmi n : il y a p fois n possibilités :

$$Card(E) = n \times n \times n \times \cdots = n^p$$

car il y a bien n choix possibles à chacun des p tirages.

Tirage sans remise

Tirage au sort sans remise : $Card(E)$ = nombre de combinaisons de p objets parmi n, $Card(E) = \binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

* Le coefficient binomial est très utilisé en probabilités.
* Il permet de résoudre des problèmes sans faire d'arbre de probabilités.
* Il se prononce "p parmi n", ou "combinaisons de p parmi n".

.

Factorielle

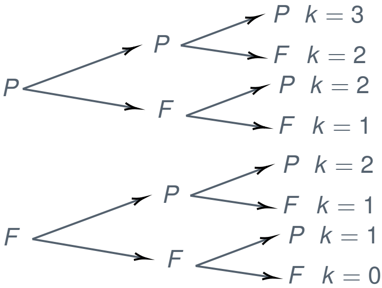
- Dans l'expression du coefficient binomial, le $n!$ se dit " factorielle de n" où n est un entier naturel.
- La fonction factorielle est le produit des nombres entiers positifs inférieurs ou égaux à n.

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Exemple : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Exemple

Soit l'épreuve de Bernoulli avec 2 issues possibles suivante : Le lancer d'une pièce de monnaie : "Pile" ou "Face". On lance 3 fois la pièce. Soit k le nombre de "Pile" obtenus.



Exemple

- Donc le nombre de combinaison possible "Pile/Face" : on a 3 expériences avec 2 issues possibles : $Card(\Omega) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ chemins possibles.
- Le nombre de "Pile", k peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.
- On peut calculer la probabilité d'avoir $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ ou $k = 3$ en utilisant le coefficient binomial :
  - $k = 0 : \binom{3}{0} = \dfrac{3!}{0!(3-0)!} = \dfrac{6}{6} = 1$

    Probabilité d'avoir 0 "Pile"$= \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \dfrac{1}{8}$
  - $k = 1 : \binom{3}{1} = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{6}{2} = 3$

    Probabilité d'avoir 1 "Pile"$= \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \dfrac{3}{8}$
  - $k = 2 : \binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{6}{2} = 3$

    Probabilité d'avoir 2 "Pile"$= \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \dfrac{3}{8}$
  - $k = 3 : \binom{3}{3} = \dfrac{3!}{3!(3-3)!} = \dfrac{6}{6} = 1$

    Probabilité d'avoir 3 "Pile"$= \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \dfrac{1}{8}$

Partie 3 : La variable aléatoire et la loi de probabilité

Plan partie 2

1. Définitions
2. Types de variables aléatoires
3. Loi de probabilité et fonction de répartition

Définition

- Une variable aléatoire X est le procédé qui relie l'expérience aléatoire à un nombre.
- On note D_X l'ensemble des valeurs que X peut prendre après la réalisation de l'expérience : D_X s'appelle le domaine de définition de X.
- A chaque fois que l'on reproduit l'expérience, on obtient une réalisation de X que l'on note x.
- Exemple 1 : soit l'expérience, jeter un dé et soit X la variable aléatoire représentant la valeur inscrite sur la face supérieure. Un joueur effectue une 1ère fois cette expérience, il obtient la réalisation $x_1 = 4$. Il recommence une 2ème fois l'expérience et obtient la réalisation $x_2 = 3$, etc...

Type de variables aléatoires

On distingue :

1. **Les variables aléatoires quantitatives :** toute variable modélisant une expérience dont les résultats sont des objets qu'on peut les quantifier, exemple : le nombre sur la face supérieure d'un dé, numéro de boule tirer d'une urne, pression artérielle, ...

2. **Les variables aléatoires qualitatives :** toute variable modélisant une expérience dont les résultats sont des objets qu'on ne peut pas quantifier, exemple : "Pile" ou "Face", couleur d'une carte obtenue, survenue d'une maladie(oui, non) , intensité douleur (importante, modérée, faible, ...), ...

Exemples de variables aléatoires et d'évènements associés

* A l'usine, on dispose d'un lot de 30 pièces prélevées dans la production sur lesquelles on effectue un contrôle de qualité à l'issue duquel on déclare les pièces conformes ou non-conformes. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces non-conformes.
  * L'ensemble des valeurs possibles pour X est $D_X = \{0,\ 1,\ \cdots\ ,\ 30\}$.
  * L'évènement "2 pièces sont non-conformes" se note $\{X = 2\}$.
  * $\{X = 50\} = \emptyset$
  * $\{8,5 \leq X \leq 10,5\}$ code pour l'événement "9 pièces ou 10 pièces sont non-conformes".

* On s'intéresse au poids des pièces qui peut varier de $10g$ à $15g$. Soit X la variable aléatoire représentant le poids (en g) d'une pièce.
  * L'ensemble des valeurs acceptables pour X est $D_X = [10,\ 15]$.
  * $\{X = 12\} =$ le poids d'une pièce est de $12g$.
  * $\{X = 50\} = \emptyset$
  * $\{8,5 \leq X \leq 10,5\} =$ le poids d'une pièce est compris entre $8,5g$ et $10,5g$.

Variable aléatoire quantitative

On distingue :

* Les variables aléatoires continues: toute valeur d'un intervalle de $\mathbb{R}$, ex : taille, poids, glycémie, temps écoulé, ...
* Les variables aléatoires discrètes : elles prennent un ensemble dénombrables (fini ou infini) de valeurs, par exemple : nombre de patients admis en réanimation, nombre de patients présentant une complication à la suite d'une opération, ...

Variable aléatoire qualitative

* Pour pouvoir modéliser une expérience dont les résultats sont qualitatifs par une variable aléatoire.
* On code les résultats issues de l'expérience par des nombres.
* Exemple : soit l'expérience, lancer une pièce de monnaie,
  * L'événement "obtenir face" peut être coder par 1 et on note $\{X = 1\}$
  * L'événement "obtenir pile" peut être coder par 0 et on note $\{X = 0\}$.

Paramètres d'une variable aléatoire

1. Espérance mathématique de la variable X, notée $E(X)$ ou μ, est la somme de toutes les réalisations possibles de X pondérées par leurs probabilités respectives.

   $\hookrightarrow$ la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.

2. Variance mathématique de la variable X, notée $Var(X)$, $V(X)$ ou σ_X^2 est l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire X centrée. $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

   $\hookrightarrow$ Mesure la dispersion des valeurs.

3. Écart-type de la variable X, noté σ_X est la racine carrée de la variance.

   $\hookrightarrow$ Mesure la dispersion des valeurs.

Loi de probabilité et la fonction de répartition

- Une variable aléatoire X est caractérisée par une **loi de probabilité** (**distribution de probabilité**) notée f_X.
- f_X une fonction permettant de décrire quelles sont les valeurs possibles prises par la variable X et avec quelle probabilité ces différentes valeurs sont prises.
- Une variable aléatoire X est aussi caractérisée par la fonction de répartition notée F_X. Elle est définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

avec $\{X \leq x\}$ = ensemble des résultats d'expérience dont le codage est inférieur ou égal à x.

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition possède l'ensemble de caractéristiques suivantes :

* F_X est croissante $\Leftrightarrow x \leq y \quad \Rightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y)$
* Pour tout x, on a $0 \leq F_X(x) \leq 1$ avec $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
* $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) \Leftrightarrow P(X > x) = 1 - F_X(x)$
* Pour $a < b$, on a :

$$P(a \leq x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Fonction de répartition d'une variable discrète

- La fonction de répartition d'une variable discrète au point x correspond à l'accumulation des probabilités des valeurs inférieures ou égales à x :

$$F_X(x) = \sum_{xi \leq x} P(X = x_i)$$

- L'espérance mathématique : $E(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i \times P(X = x_i)$
- La variance mathématique : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ avec $E(X^2) = \sum_{x_i \in D_X} x_i^2 \times P(X = x_i)$

Remarque !

On a toujours :

- $E(a \times X) = a \times E(X)$, $E(a + X) = a + E(X)$ et $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.
- $V(a \times X) = a^2 \times V(X)$, $V(X + a) = V(X)$ et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ ssi X_1 et X_2 sont indépendantes.

Fonction de répartition d'une variable continue

* La fonction de répartition est définie par la densité de probabilité $f(x)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

* L'espérance mathématique : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)dx$
* La variance mathématique : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)dx$

Remarque !

On a toujours :

- $E(a \times X) = a \times E(X)$, $E(a + X) = a + E(X)$ et $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.
- $V(a \times X) = a^2 \times V(X)$, $V(X + a) = V(X)$ et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ ssi X_1 et X_2 sont indépendantes.

Lois de probabilités usuelles

Rappel

- Variable aléatoire : permet de modéliser une expérience aléatoire et elle prend les valeurs possibles codant les résultats de l'éxperience aléatoire.
  - Variable quantitative : discrète et continue.
  - Variable qualitative.
- La loi de probabilité (distribution de probabilité) : fonction permettant de décrire les valeurs possible de la variable aléatoire et les probabilités avec lesquelles sont prises.
- La fonction de répartition de X est définie par $F_X(x) = P(X \leq x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
- Il existe des lois usuelles :
  - Loi discrète
  - Loi continue

Plan

1. Lois usuelles discrètes
   - Loi Bernoulli
   - Loi Binomiale
   - Loi Poisson
2. Lois usuelles continues
   - Loi uniforme
   - Loi normale

Lois discrètes

Loi Bernoulli

* Soit une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles.

* $\Omega = \{E,\ \bar{E}\}$ avec :
  * $E = \{$"le succès" $\}$
  * $\bar{E} = \{$"l'échec" $\}$

* On associe à cette épreuve une v.a. discrète Y ayant deux réalisations possibles :
  * $Y = 1$, réalisation associée au succès avec : $P(Y = 1) = \pi$
  * $Y = 0$, réalisation associée à l'échec avec : $P(Y = 0) = 1 - \pi$

* Cette variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre π : $Y \sim \mathcal{B}(\pi)$.

* $E(Y) = \sum_{yi} y_i \times P(Y = y_i) = 1 \times \pi + 0 \times (1 - \pi) = \pi$

* $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \sum_{y_i} y_i^2 \times P(Y = y_i) - \pi^2 = 1^2 \times \pi + 0^2 \times (1 - \pi) - \pi^2 = \pi - \pi^2 = \pi(1 - \pi)$

* $\sigma = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\pi(1 - \pi)}$

Loi Bernoulli

Exemples : Soit la v.a. X est la surface d'une pièce de monnaie obtenue suite au lancé. Déterminer la loi de X et calculer ses paramètres.

- Deux résultats possibles :
  - "Obtenir une Pile" est considéré comme un succès, $P(X = 1) = 1/2 = \pi$.
  - "Obtenir une face" est considéré comme un échec, $P(X = 0) = 1/2 = 1 - \pi$.

  $\rightsquigarrow X \sim \mathcal{B}(\pi = 1/2)$

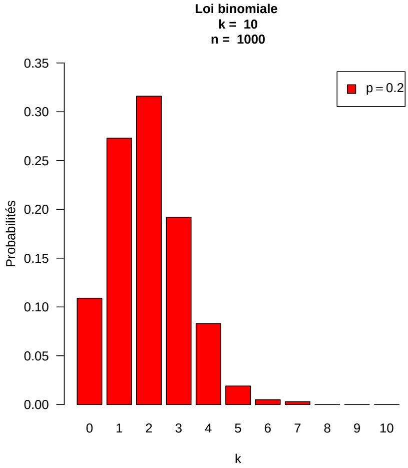
- $E(X) = \sum_{xi} x_i \times P(X = x_i) = 1 \times \pi + 0 \times (1 - \pi) = 1/2$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = [1^2 \times 1/2 + 0^2 \times 1/2] - 1/4 = 1/4$
- $\sigma = \sqrt{1/4} = 1/2$

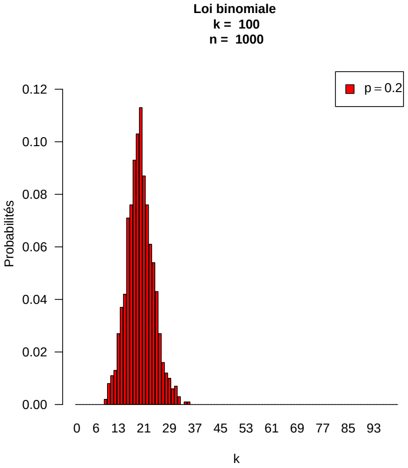
Loi Binomial

* Pour une expérience dont les issues sont, "un succès" et "un échec" avec une probabilité de succès π.
* Si on répète l'experience n fois et on souhaite calculer le nombre de succès. Ce nombre peut être modéliser par une v.a. Y qui suit une loi Binomiale.
* Y est tout simplement la somme de n v.a. de Bernoulli X_i ($i = 1, \cdots, n$) indépendantes et identiquement distribuées (de même π).
* $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}in(n, \pi)$
* $P(Y = k) = \binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}$ pour $1 \leq k \leq n$ avec $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
* $E(Y) = n\pi$
* $V(Y) = n\pi(1-\pi)$
* $\sigma(Y) = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$

Loi Binomial

Diagramme en bâtons





Loi Binomial

Exemple 1 : On fabrique des pièces et on suppose que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse est $\pi = 0.05$.

Lors d'un contrôle de $n = 1000$ pièces :

1. Déterminer la probabilité de trouver 30 pièces défectueuses.
2. En moyenne combien y a t'il de pièces défectueuses.

* Soit la v.a. X le nombre de pièces défectueuses. $X \sim \mathcal{B}in(n = 1000,\ \pi = 0.05)$
* $P(X = 30) = \binom{1000}{30} \times 0.05^{30} \times (1 - 0.05)^{1000-30} \approx 0.00056$
* $E(X) = n\pi = 1000 \times 0.05 = 50$. En moyenne il y a 50 pièces défectueuses.

Loi Binomial

Exemple 2 : Tireur qui atteint sa cible avec une probabilité de $0,7$. Avec 10 essais :

1. Quelle est la probabilité d'atteindre exactement 5 fois la cible.
2. Quelle est la probabilité d'atteindre plus de cinq fois la cible.
3. Combien de tirs n lui faut pour atteindre la cible au moins une fois avec une probabilité de $0,9$.

Correction :

Soit la v.a. X le nombre de fois la cible est atteinte. $X \sim \mathcal{B}in(n = 10,\ \pi = 0,7)$

1. $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0.7^5 \times (1 - 0.7)^{10-5} \approx 0.103$
2. $$\begin{aligned} P(X > 5) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{6} \times 0,7^5 \times (1 - 0,7)^{10-6} + \cdots + \binom{10}{10} \times 0,7^{10} \times (1 - 0,7)^{10-10} \\ &= 0.850 \end{aligned}$$
3. $P(1 \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left[\binom{n}{0} \times 0,7^0 \times (1 - 0,7)^{n-0}\right] = 1 - 0,3^n$
   Il faut que $P(X \geq 1) = 0.9 \rightsquigarrow 1 - 0,3^n = 0,9 \rightsquigarrow -0,3^n = -0,1 \rightsquigarrow 0,3^n = 0,1$
   $ln(0,3^n) = ln(0,1) \rightsquigarrow n \times ln(0,3) = ln(0,1) \rightsquigarrow n = \dfrac{ln(0,1)}{ln(0,3)} = 1,912489$ donc
   $n = 2$

Loi Binomial

Remarque !

- ⋆ Si $Y \sim \mathcal{B}in(n,\ \pi)$ est le nombre de succès, donc la v.a. $n - Y \sim \mathcal{B}in(n,\ 1-\pi)$ est le nombre d'échecs.
- ⋆ Si $X \sim \mathcal{B}in(n_1,\ \pi)$ et $Y \sim \mathcal{B}in(n_2,\ \pi)$ avec X et Y deux v.a. indépendantes et identiquement distribuées, alors la v. a. S, somme de ces deux variables aléatoires, suit aussi une loi binomiale : $S \sim \mathcal{B}in(n_1+n_2,\ \pi)$

Loi Poisson

- Pour une variable aléatoire discrète Y suit une loi de poisson.
- La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est définie par :

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \quad \text{avec } k \in 0,\ 1,\ \cdots$$

- Le paramètre de la loi de Poisson est à la fois l'espérance et la variance de Y :

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

- Elle décrit la probabilité qu'un événement se réalise durant un intervalle de temps donné.
- Exemple d'utilisation : Si un événement se produit en moyenne N fois par seconde, pour étudier le nombre d'événements se produisant pendant 60 secondes, on choisit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 60 \times N$.

Loi Poisson

Exemple : Sur un trajet ferroviaire, on constate en moyenne 2 incidents par an.

1. Quelle est la probabilité qu'il y en ait exactement 8 en 10 ans ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y en ait 8 ou moins de 8 en 10 ans ?

Correction : Soit X est le nombre d'accident pendant 10 ans.
$\rightsquigarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda = 2 \times 10 = 20)$

1. $P(X = 8) = \dfrac{e^{\lambda}\lambda^{k}}{k!} = \dfrac{e^{-20} \times 20^{8}}{8!} \approx 0.00134$
2. $F_X(8) = P(X \leq 8) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 8) \approx 0.00209.$

Loi Poisson

Remarque !

* La somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres respectifs $\lambda_i, \ i = 1, \cdots, n$ suivent une loi de Poisson de paramètre $\sum \lambda_i$.
* Une loi binomiale $\mathcal{B}in(n, \ \pi)$ peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\pi$ si n est grand et π est petit (Loi des événements rares).

Loi Poisson

Exemple : Une maladie a une prévalence de 10^{-4} dans la population. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 4 malades dans une ville de 20000 habitants ?

* Soit la v.a. X le nombre de malades $\rightsquigarrow X \sim \mathcal{B}in(n = 20000,\ \pi = 10^{-4})$

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\
&= 1 - [P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)] \\
&= = 1 - \left[\binom{20000}{3}\pi^3(1-\pi)^{20000-3} + \cdots + \binom{20000}{0}\pi^0(1-\pi)^{20000-0}\right] \\
&= 0.1428675
\end{aligned}$$

* $n = 20000$ est grand et $pi = 10^{-4}$ est très faible $\rightsquigarrow$ l'apparition de la maladie est très rare, donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda = n \times \pi = 20000 \times 10^{-4} = 2)$

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\
&= 1 - [P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)] \\
&= = 1 - \left[\frac{e^{-\lambda} \times \lambda^3}{3!} + \cdots + \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^1}{1!}\right] \\
&= 0.1428675
\end{aligned}$$

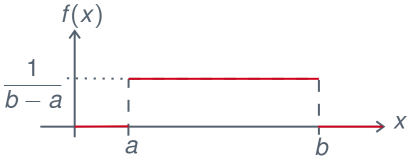
Lois continues

Loi uniforme

* Soi a et b réels ($\{a,\ b\} \in \mathbb{R}$) tels que $a < b$.

* On appelle loi uniforme sur $[a,\ b]$ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction constante définie par :

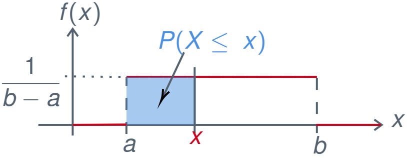
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$



Loi uniforme

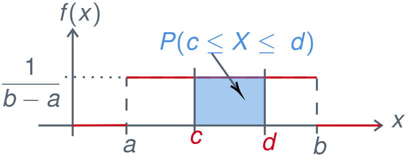
* Pour toute valeur $x \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$



* Pour tout intervalle $[c,\ d] \subset [a,\ b]$

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$



Loi uniforme

* $E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \dfrac{a+b}{2}$
* $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{2}$

Loi uniforme

Exemple : Le temps d'attente T, en minutes, dans un laboratoire d'analyse médical suit la loi uniforme sur l'intervalle $[10\ ,\ 25]$.

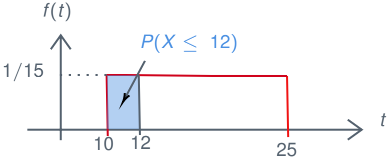
1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 12 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 18 minutes ?
3. Quel est le temps d'attente moyen dans ce laboratoire ?

Correction : La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[10\ ,\ 25]$, donc

la densité de probabilité définie par la fonction :

$$f(t) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{25-10} = \frac{1}{15}$$

1. $P(X \leq 12) = (12-10) \times \dfrac{1}{15} = \dfrac{2}{15}$

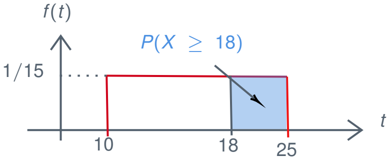


Loi uniforme

2. $P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 18) = 1 - \left[\dfrac{18-10}{15}\right] = \dfrac{15}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15}$

autrement

$P(X \geq 18) = (25-18) \times \dfrac{1}{15} = \dfrac{7}{15}$



3. $E(X) = \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{25+10}{2} = \dfrac{35}{2} = 17,5$

$\rightsquigarrow$ Le temps d'attente moyen est de $17,5$ minutes.

Loi normale

- La loi la plus utilisée en statistique.
- Elle représente beaucoup de phénomènes aléatoires.
- Nombreuse autres lois de probabilité peuvent être approchées par la loi normale, tout spécialement dans le cas des grands échantillons (n est grand)
- Appelée aussi loi de Gauss, ou de Laplace-Gauss.
- Une variable aléatoire X suit une loi normale si sa densité de probabilité définie par $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, donnée par :

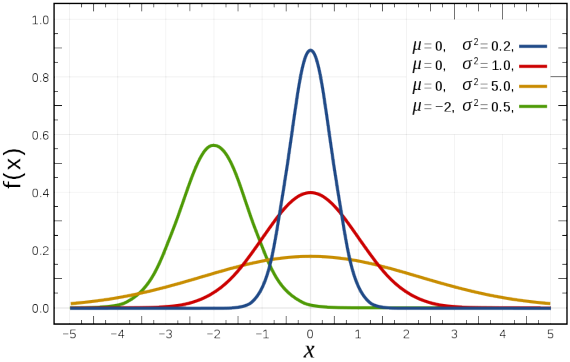
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Avec $\mu = E(X)$, l'espérance de X.
- Avec $\sigma^2 = V(X)$, la variance de X $\rightsquigarrow$ σ est l'écart-type de X.

Loi normale

* Le graphe de la fonction de densité et une courbe en cloche, symétrique autour de μ.

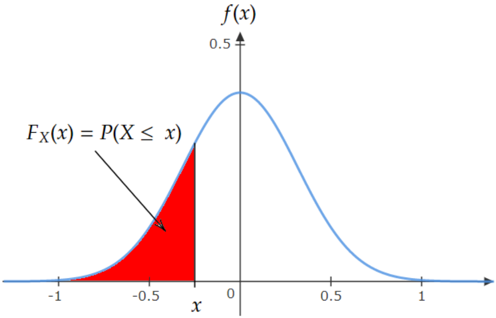
* σ caractérise la dispersion de la distribution $\rightsquigarrow$ plus σ est grand plus la distribution est étalée de part et d'autre de μ.



Loi normale

* Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$



Loi normale centrée réduite

- Pour une v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu,\ \sigma)$.
- On retranche de X sa moyenne $\mu \rightsquigarrow X$ est centrée.
- On divise X par son écart-type $\sigma \rightsquigarrow X$ est réduite.
- Si on combine les deux : on centre puis on réduit :

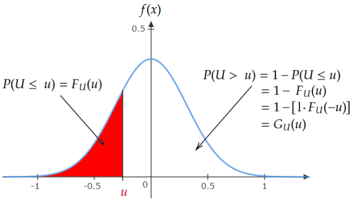
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Standardisation de la variable aléatoire X.
- Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(Z \leq z) = F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} int_{-\infty}^{z} f(z)dz = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{z^2}{2}} dz$
- Une table prédéfinie pour la loi normale centrée réduite pour le calcul des probabilités.

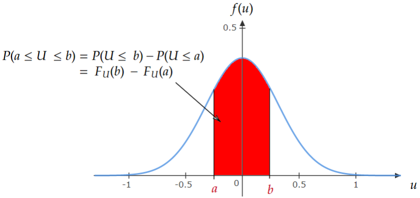
Loi normale centrée réduite

Quelques propriétés : Soit $U \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$

* $P(U > u) = 1 - P(U \leq u)$



* $P(a \leq U \leq b) = P(U \leq b) - P(U \leq a)$



Loi normale centrée réduite

Exemple : Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1\ )$

1. Quelle est la probabilité d'observer des valeurs de Z supérieures à $1,96$?
2. Quelle est la probabilité d'observer des valeurs de $|Z|$ supérieures à $1,96$?

Correction :

1.

$$P(Z > 1,96) = G_Z(1,96) = 0,025$$

ou bien

$$\begin{aligned} P(Z > 1,96) &= 1 - P(Z \leq 1,96) \\ &= 1 - F_Z(1,96) \\ &= 1 - 0,975 \\ &= 0,025 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(|Z| > 1,96) &= P(Z < -1,96) + P(Z > 1,96) \\ &= F_Z(-1,96) + G_Z(1,96) \\ &= 1 - F_Z(1,96) + G_Z(1,96) \\ &= 1 - 0,975 + 0,025 \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

Loi normale centrée réduite

Exercice : La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125,\ 4,5)$. Avec des résultats arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer les probabilités suivantes : $P(122 \leq X \leq 128)$, $P(X \leq 129,5)$, $P(X \geq 130,4)$, $P(X \geq 118,7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leq a) = 0,871$
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geq b) = 0,02$

Correction :

1.

$$\begin{aligned}
P(122 \leq X \leq 128) &= P(X \leq 128) - P(X \leq 122) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{128-\mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{122-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{128-125}{4,5}\right) - P\left(Z \leq \frac{122-125}{4,5}\right) \\
&= P(Z \leq 0,666) - P(Z \leq -0,666) \\
&= P(Z \leq 0,666) - [1 - P(Z \leq 0,666)] \\
&= F_Z(0,666) - [1 - F_Z(0,666)] \\
&= 0,747 - [1 - 0,747] \\
&= 0,494
\end{aligned}$$

Loi normale centrée réduite

1.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 129,5) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{129,5-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{129,5-125}{4,5}\right) \\
&= P(Z \leq 1) = F_Z(1) = 0,841
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 130,4) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{130,4-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{130,4-125}{4,5}\right) \\
&= P(Z \geq 1,2) = G_Z(1,2) = 0,115
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 118,7) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{118,7-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{118,7-125}{4,5}\right) \\
&= P(Z \geq -1,4) = 1 - G_Z(1,4) = 1 - 0,081 = 0.919
\end{aligned}
$$

Loi normale centrée réduite

2.

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{a-125}{4,58}\right) \\ &= 0,871 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \dfrac{a-125}{4,5} = 1,1311 \Longleftrightarrow a - 125 = 4,5 \times 1,1311 \Longleftrightarrow a = (4,5 \times 1,1311) + 125 = 130,090$

3.

$$\begin{aligned} P(X \geq b) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{b-125}{4,58}\right) \\ &= 0,02 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \dfrac{b-125}{4,5} = 2,0537 \Longleftrightarrow b - 125 = 4,5 \times 2,0537 \Longleftrightarrow b = (4,5 \times 2,0537) + 125 = 134,241$