Zied GHARBI

Université Lumière Lyon2

TD2 corrigé - Probabilités
Licence 1 MIASHS

Exercice 1

On considère 2 événements A et B, de probabilités $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ et $P(A \cap B) = 1/4$.

Calculer :

1. $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{(4+6-3)}{12} = \frac{7}{12}$$

2. $P_B(A)$ et $P_A(B)$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2

On considère 2 événements A et B tels que $P(A) = 1/5$ et $P(B) = 1/4$. On sait aussi que $P(A \cup B) = 7/20$.

A et B sont-ils indépendants?

A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

On sait que

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{7}{20} = \frac{4+5-7}{20} = \frac{2}{20}$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

$\rightsquigarrow$ A et B ne sont pas indépendants

Exercice 3

Avant la réforme du concours de l'internat de médecine survenue en 2004, la population des étudiants en médecine a été classée en fonction de l'âge (âge inférieur à 22 ans : événement A) et l'avis par rapport au maintien du concours de l'internat (Favorable au concours : événement I).
On obtient le tableau suivant :

	Pour le concours (I)	Contre le concours ($\bar{I}$)
Moins de 22 ans (A)	7.8%	32.2%
Plus de 22 ans ($\bar{A}$)	18.2%	41.8%

1. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant en médecine choisi au hasard soit pour le concours de l'internat?

   Probabilité totale :

   $$P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap \bar{A}) = 0.078 + 0.182 = 0.26$$

2. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant en médecine de moins de 22 ans soit pour le concours de l'internat?

   Probabilité Conditionnelle :
   $$P_I(A) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{0.078}{0.26} = 0.3$$

3. Quelle est la probabilité qu'un étudiant n'est pas favorable au concours ait moins de 22 ans? Déduire de la question précédente.

   Probabilité conditionnelle et théorème de Bayes :

   $$P_A(\bar{I}) = 1 - P_A(I) = 1 - \frac{P_I(A) \times P(I)}{P(A)} = 1 - \frac{0.3 \times 0.26}{(0.078 + 0.322)} = 0.195$$

4. Parmi les propositions suivantes, laquelle/lesquelles est/sont vraie(s)? Justifier.

   - A et I sont incompatibles. Faux car $P(A \cap I) \neq 0$
   - A et I sont indépendants. Faux $P(A \cap I) = 0.078 \neq P(A) \times P(I)$ avec $P(A) \times P(I) = 0.41 \times 0.26 \approx 0.11$
   - $P(A) = P(A \cup I) - P(I)$. Faux $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I) \Leftrightarrow P(A) = P(A \cup I) - P(I) + P(A \cap I)$ or $P(A \cap I) = 0.078 \neq 0$
   - $P(A) = P(A \cup I) + P(A \cap I) - P(I)$. Vraie, déjà démontrée juste avant
   - $P(A) = P(I \cap \bar{A}) + P(A) - P(A \cap \bar{I})$. Faux car $P(I \cap \bar{A}) \neq P(A \cap \bar{I})$ avec $P(I \cap \bar{A}) = 0.182$ et $P(A \cap \bar{I}) = 0.322$

Exercice 4 : (issue de Tversky A. et Kahneman D., «Causal schemas in judgment under uncertainty» 1980)

Dans une ville, deux compagnies opèrent des taxis : les Verts, qui représentent 85% de la flotte totale, et les Bleus, qui ont les 15% restants. Un accident survient la nuit et le véhicule impliqué quitte la scène. Un témoin affirme qu'il s'agissait d'un taxi Bleu.

Quelle est la probabilité que le taxi responsable soit effectivement un Bleu?

A noter que que la fiabilité des témoignages dans des conditions analogues à celles prévalant lors de l'accident est évaluée à 80% (les témoins identifient correctement la couleur du taxi dans 80% des cas, et se trompent dans 20%)?

Notons tout d'abord les événement suivants :

- B : Le taxi est un Bleu
- V : le Taxi est un Vert
- PB : le témoin affirme que le taxi est un Bleu
- PV : le témoin affirme que le taxi est un Vert

D'aprés l'énoncé on relève :

$P(B) = 0.15$ et $P(V) = 0.85$

$P_B(PB) = P_V(PV) = 0.8$ et $P_V(PB) = P_B(PV) = 0.2$

Nous cherchons $P_{PB}(B)$, selon le théorème de Bayes :

$$P_{PB}(B) = \frac{P_B(PB) \times P(B)}{P(PB)},$$

avec

* $P_B(PB) = 0.8$
* $P(B) = 0.15$
* $P(PB) = P_B(PB) \times P(B) + P_V(PB) \times P(V) = (0.8 \times 0.15) + (0.2 \times 0.85) = 0.29$

$\rightsquigarrow P_{PB}(B) = \dfrac{0.8 * 0.15}{0.29} \approx 0.414$