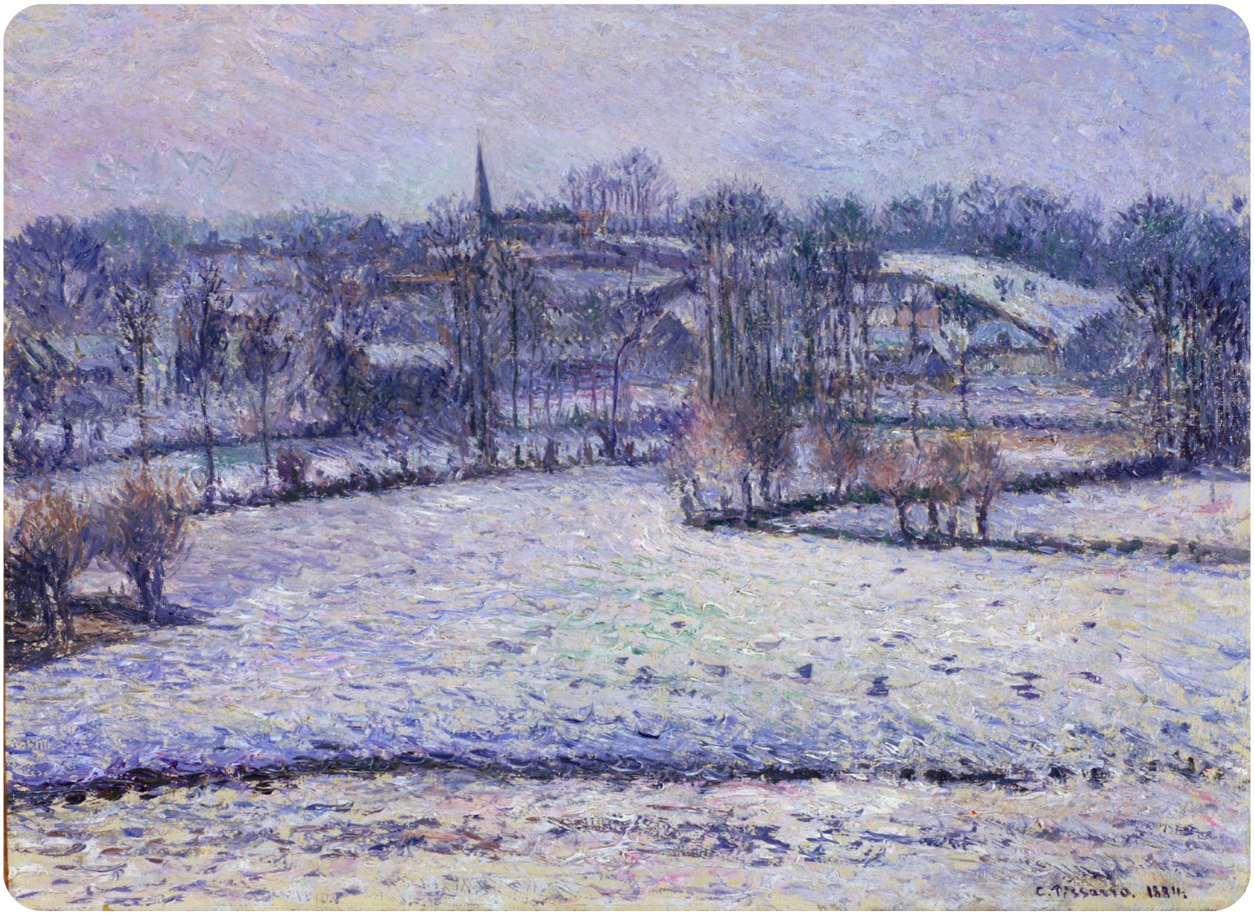
Exercices bonus – TD5

Hadrien Bigo-Balland



Exercice 1 : Loi uniforme

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[2, 8]$.

Questions :

1. Déterminez la fonction de densité de probabilité de U.
2. Calculez $P(3 \leq U \leq 5)$.
3. Calculez $P(U \leq 4.5)$.
4. Calculez $P(U > 6)$.
5. Déterminez la valeur c telle que
$$P(U \leq c) = 0.75.$$

Exercice 2 : Loi normale standard et table de la loi normale

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Questions :

1. À l'aide de la table de la loi normale, déterminez
$$P(X \leq 0.95).$$
2. À l'aide de la table de la loi normale, déterminez
$$P(X \leq -0.7).$$
3. Calculez la probabilité
$$P(-0.7 \leq X \leq 1.3).$$
4. En exploitant la symétrie de la loi normale, exprimez $P(X > 0.95)$ en fonction de $P(X \leq 0.95)$.

Exercice 3 : Loi normale avec paramètres non standards

Soit $Y \sim \mathcal{N}(5, 9)$ (moyenne 5, variance 9 donc écart-type 3).

Questions :

1. Calculez $P(Y \leq 7)$.
2. Calculez $P(Y > 2)$.

3. Calculez la probabilité
$$P(3 \leq Y \leq 8).$$

Exercice 4 : Recherche de quantiles dans la loi normale

Soit $Z \sim \mathcal{N}(10, 16)$ (moyenne 10, écart-type 4).

Questions :

1. Déterminez la valeur a telle que
$$P(Z \leq a) = 0.80.$$
2. Déterminez la valeur b telle que
$$P(Z > b) = 0.02.$$

Astuce : Standardisez la variable et utilisez la table de la loi normale pour inverser la fonction de répartition.

Exercice 5 : Problème appliqué – Conditionnement de volume

Une machine produit des bouteilles contenant un liquide dont le volume suit la loi normale $V \sim \mathcal{N}(500, 25)$ (moyenne 500 ml, variance 25 ml^2, écart-type 5 ml).

Questions :

1. Représentez schématiquement la densité de probabilité de V.
2. Calculez la probabilité qu'une bouteille contienne plus de 505 ml, c'est-à-dire
$$P(V > 505).$$
3. (a) Déterminez $P(495 \leq V \leq 510)$.
   (b) Trouvez la valeur a telle que
$$P(V < a) = 0.05.$$

Corrigés

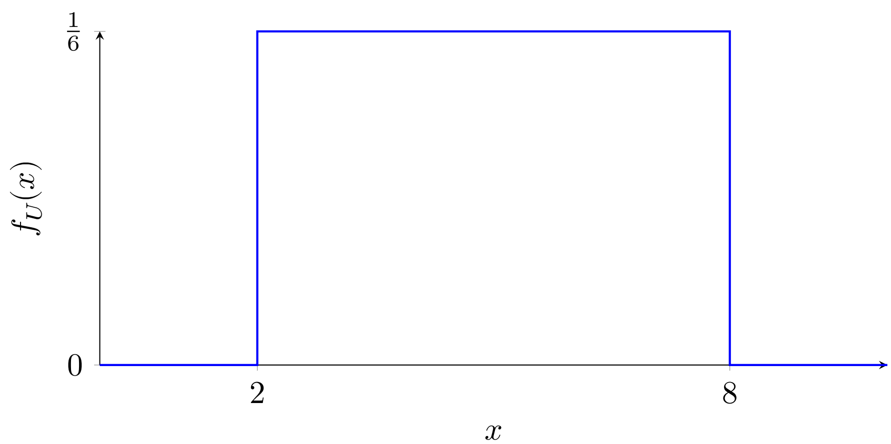
Exercice 1 : Loi uniforme

Soit $U \sim \mathcal{U}([2,8])$.

1. La densité de probabilité de U est constante sur l'intervalle $[2,8]$ et nulle ailleurs :

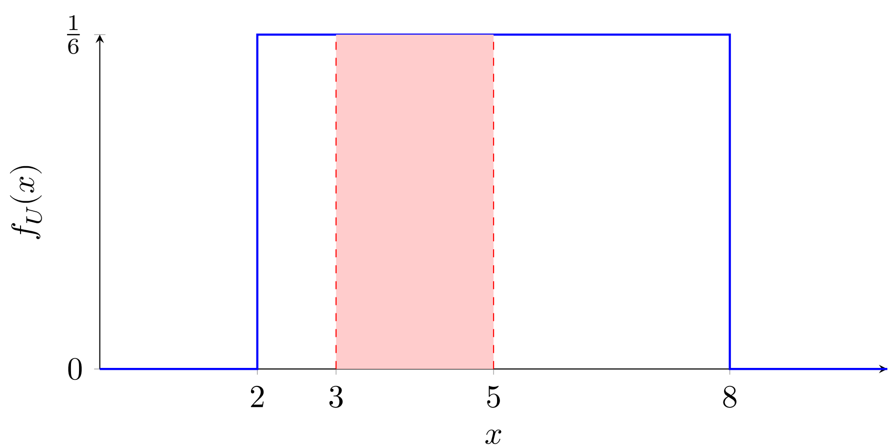
$$f_U(x) = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6} \quad \text{pour } x \in [2,8], \quad \text{et } f_U(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

   Pour illustrer, voici un graphique représentant cette densité[1].



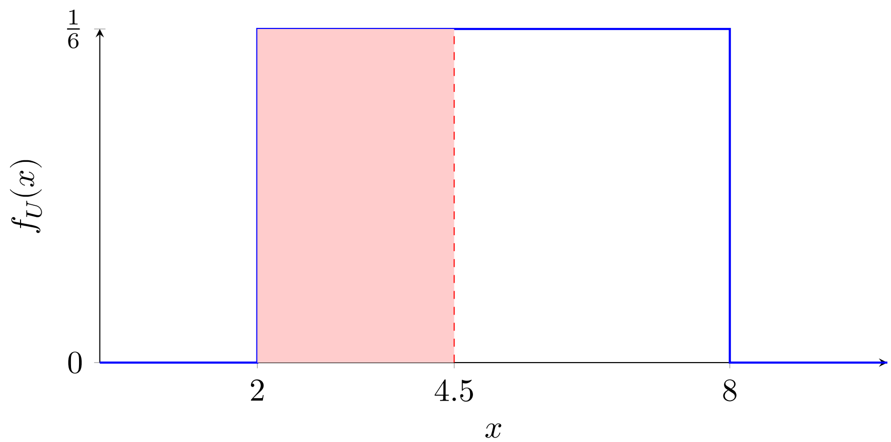
2. La probabilité $P(3 \leq U \leq 5)$ correspond à l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[3,5]$:

$$P(3 \leq U \leq 5) = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

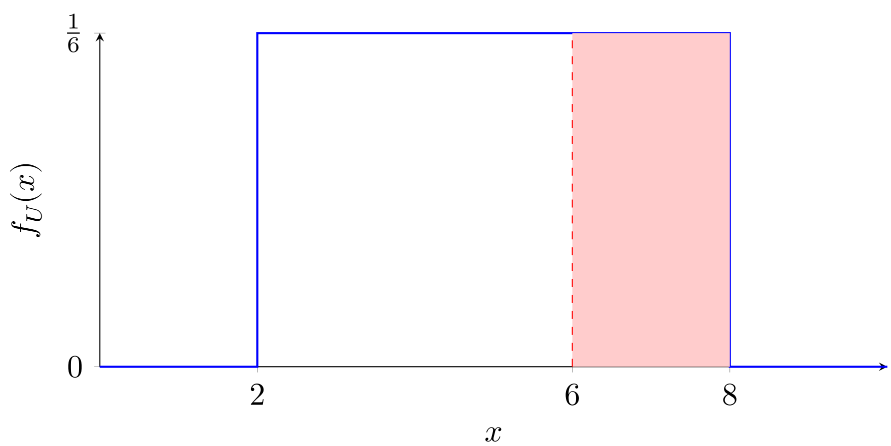


[1] Bien que le dessin ne soit pas obligatoire, il permet de visualiser le lien entre la théorie, l'application et la représentation graphique.

3. La probabilité $P(U \leq 4.5)$ correspond à l'aire sous la courbe à gauche de $x = 4.5$:
$$P(U \leq 4.5) = \frac{4.5 - 2}{6} = \frac{2.5}{6} = \frac{5}{12}.$$



4. La probabilité $P(U > 6)$ correspond à l'aire sous la courbe à droite de $x = 6$:
$$P(U > 6) = \frac{8 - 6}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

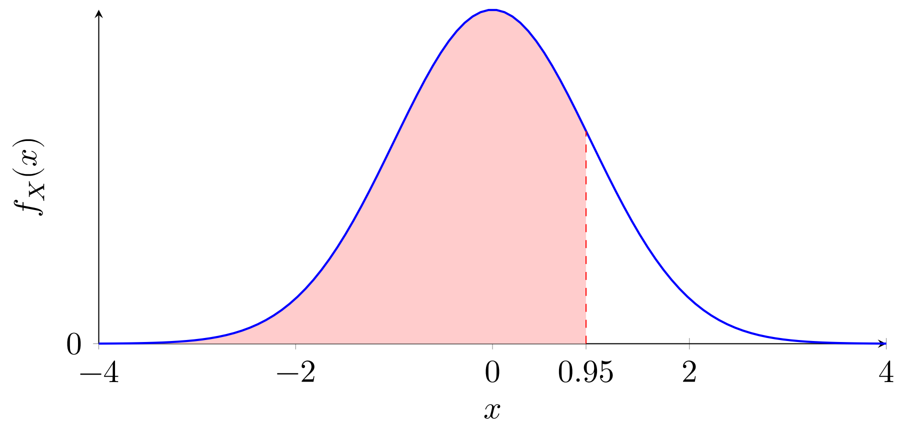


5. Pour déterminer c tel que $P(U \leq c) = 0.75$, on utilise la fonction de répartition de la loi uniforme :
$$P(U \leq c) = \frac{c - 2}{6}.$$
On égalise à 0.75 et on trouve :
$$\frac{c-2}{6} = 0.75 \quad \Longrightarrow \quad c - 2 = 4.5 \quad \Longrightarrow \quad c = 6.5.$$

Exercice 2 : Loi normale standard et table de la loi normale

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. D'après la table de la loi normale, on trouve :



$$P(X \leq 0.95) \approx 0.8289.$$

2. En utilisant la symétrie de la loi normale, on a :

$$P(X \leq -0.7) = P(X \geq 0.7).$$

Or, comme $P(X \geq 0.7) = 1 - P(X < 0.7)$, d'après la table, on obtient :

$$P(X \leq -0.7) \approx 0.2420.$$

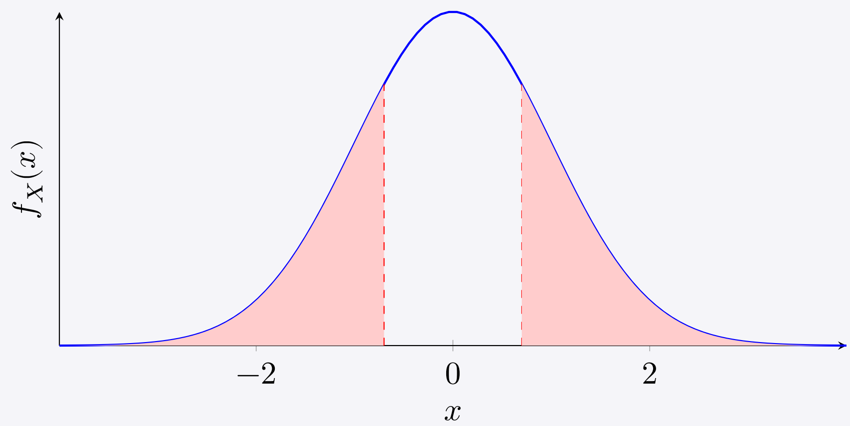
Utilisation de la symétrie de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

La table de la loi normale donne généralement les valeurs de $P(X \leq x)$ pour $x \geq 0$. Pour $x < 0$, on exploite la symétrie :

$$P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x).$$

Pourquoi la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est-elle symétrique ?

Loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ (ou loi centrée-réduite)



La loi normale a été conçue pour modéliser des phénomènes se regroupant autour d'une moyenne. Gauss, en élaborant cette loi, a opté pour une courbe symétrique car aucun a priori ne favorisait les écarts inférieurs ou supérieurs à la moyenne. Ainsi, sur le graphique, l'aire située à gauche de -0.7 (correspondant à $P(X \leq -0.7)$) est exactement identique à celle se trouvant à droite de 0.7 (correspondant à $P(X \geq 0.7)$). Cette propriété de symétrie justifie l'égalité :

$$P(X \leq -0.7) = P(X \geq 0.7),$$

permettant ainsi d'utiliser, par exemple, les valeurs fournies par la table de la loi normale qui ne donne que $P(X \leq x)$ pour $x \geq 0$.

⚠ **Attention**

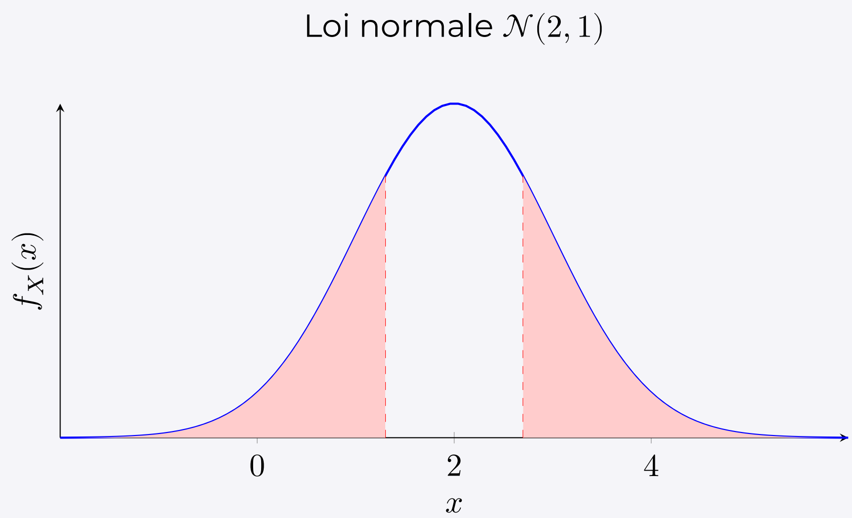
Dans cet exemple, la symétrie est illustrée pour la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ (où la moyenne est 0). Pour une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \neq 0$, il convient de recentrer cette symétrie autour de μ en appliquant la relation :

$$P(X \leq \mu - a) = P(X \geq \mu + a).$$

Par exemple, si l'on considère une variable X suivant la loi $\mathcal{N}(2,1)$ et que l'on souhaite calculer $P(X \leq -0.7)$, on peut procéder ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \leq -0.7) &= P\Big(X \leq 2 - 2.7\Big) \\ &= P\Big(X \geq 2 + 2.7\Big) \\ &= P(X \geq 4.7), \end{aligned}$$

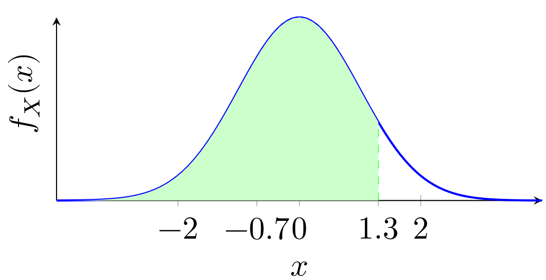
puis poursuivre les calculs de la même manière que dans l'exemple précédent.

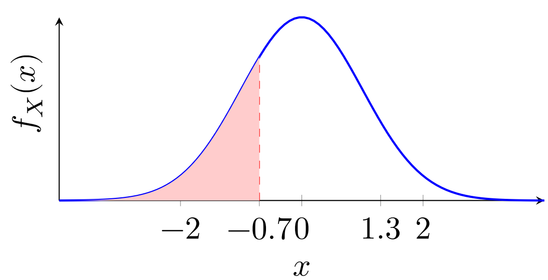


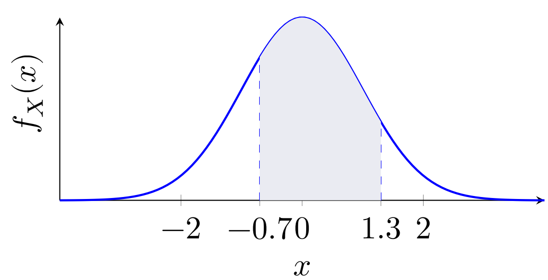
3. Pour calculer $P(-0.7 \le X \le 1.3)$, on utilise la décomposition suivante :

$$P(-0.7 \le X \le 1.3) = P(X \le 1.3) - P(X \le -0.7).$$

Visuellement, on peut voir qu'en soustrayant l'aire rouge à l'aire verte, on obtient l'aire bleue :







D'après la table, $P(X \le 1.3) \approx 0.9032$ et $P(X \le -0.7) \approx 0.2420$. Ainsi,

$$P(-0.7 \le X \le 1.3) \approx 0.9032 - 0.2420 \approx 0.6612.$$

4. En notant que $P(X > 0.95) = 1 - P(X \leq 0.95)$, on obtient :

$$P(X > 0.95) \approx 1 - 0.8289 = 0.1711.$$

Exercice 3 : Loi normale avec paramètres non-standards

Soit $Y \sim \mathcal{N}(5, 9)$ avec écart-type 3.

1. Pour calculer $P(Y \leq 7)$, on standardise :

$$Z = \frac{Y-5}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{7-5}{3} \approx 0.67.$$

   Ainsi,

$$P(Y \leq 7) = P(Z \leq 0.67) \approx 0.7486.$$

Standardisation d'une loi normale

Lorsque l'on souhaite exploiter la table de la loi normale (qui concerne $\mathcal{N}(0, 1)$), on standardise la variable Y en utilisant la transformation :

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}.$$

Ici, avec $\mu = 5$ et $\sigma = 3$, pour $Y = 7$ on a $Z \approx 0.67$.

2. Pour $P(Y > 2)$, on standardise :

$$Z = \frac{Y-5}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2-5}{3} = -1.$$

   Ainsi,

$$P(Y > 2) = P(Z > -1) = 1 - P(Z \leq -1) \approx 1 - 0.1587 = 0.8413.$$

3. Pour $P(3 \leq Y \leq 8)$, on calcule les bornes standardisées :

$$\frac{3-5}{3} \approx -0.67 \quad \text{et} \quad \frac{8-5}{3} \approx 1.$$

   Par conséquent,

$$P(3 \leq Y \leq 8) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.67) \approx 0.8413 - 0.2514 \approx 0.5899.$$

Exercice 4 : Recherche de quantiles dans la loi normale

Soit $Z \sim \mathcal{N}(10, 16)$ avec écart-type 4.

1. Pour trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0.80$, standardisons :

$$\frac{a-10}{4} \approx 0.84 \quad \Longrightarrow \quad a \approx 10 + 4 \times 0.84 = 13.36.$$

2. Pour déterminer b tel que $P(Z > b) = 0.02$, il faut que $P(Z \leq b) = 0.98$. On a alors :

$$\frac{b-10}{4} \approx 2.05 \quad \Longrightarrow \quad b \approx 10 + 4 \times 2.05 = 18.20.$$

Exercice 5 : Problème appliqué – Conditionnement de volume

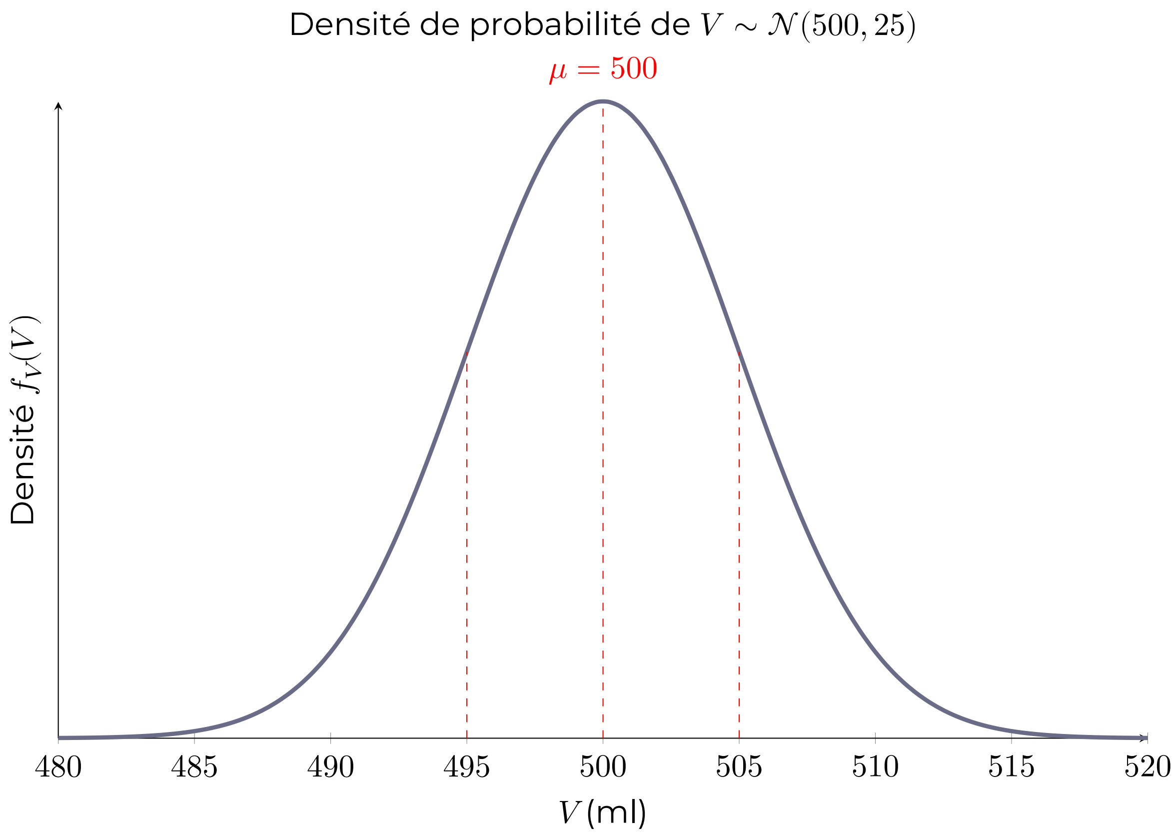
Soit $V \sim \mathcal{N}(500, 25)$ avec écart-type 5.

1. La densité de V correspond à une courbe en cloche (courbe de Gauss) centrée en 500 ml avec un écart-type de 5 ml. Les points d'inflexion[2], indiquant le changement de concavité de la courbe, se situent à 500 ± 5, c'est-à-dire en 495 ml et 505 ml.

   Remarque

   Les points d'inflexion correspondent aux positions où la courbe change de concavité (passant d'une forme concave à convexe). Pour une loi normale, ils se trouvent à une distance égale à l'écart-type de la moyenne. Ici, avec $\mu = 500$ ml et $\sigma = 5$ ml, ils se situent en 495 ml et 505 ml.

[2] Pas à connaître.



2. Pour $P(V > 505)$, on standardise :

$$Z = \frac{V - 500}{5} \implies \frac{505 - 500}{5} = 1.$$

   Ainsi,

$$P(V > 505) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

3. (a) Pour $P(495 \leq V \leq 510)$, les bornes se transforment en :

$$\frac{495 - 500}{5} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{510 - 500}{5} = 2.$$

   D'où,

$$P(495 \leq V \leq 510) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) \approx 0.9772 - 0.1587 \approx 0.8185.$$

   (b) Pour trouver a tel que $P(V < a) = 0.05$, on écrit :

$$P\left(Z < \frac{a - 500}{5}\right) = 0.05.$$

   La valeur correspondante est environ $Z = -1.645$, donc

$$\frac{a - 500}{5} = -1.645 \implies a = 500 - 5 \times 1.645 \approx 491.78 \text{ ml}.$$